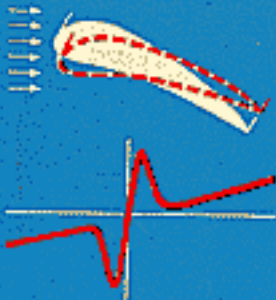


П
И
Т
Л

В.Г. ПАВЛОВИЧ
И.Н. ГУБАЮОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ



Я. Г. ПАНОВКО, И. И. ГУБАНОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

СОВРЕМЕННЫЕ КОНЦЕПЦИИ,
ПАРАДОКСЫ И ОШИБКИ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ



МОСКВА «ИЛСРКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

Павлова Я. Г., Губанова Н. Н. Устойчивость и колебания упругих систем. Современная концепция, парадоксы и открытия. — 4-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 352 с. — (Труды науки и техн. прогресса).

Рассмотрены некоторые вопросы современной механики. В первой части книги рассмотрены вопросы устойчивости упругих и упругопластических систем, а во второй части — вопросы колебаний систем с нелинейными жесткими связями, дестабилизирующее действие сил вращающего момента, колебания трубопроводов с протеканием жидкости, действие колесной нагрузки, вращающей колеблющуюся, колеблющаяся нагрузка на вращающуюся систему. Для широкого круга научных сотрудников, а также для студентов и аспирантов механических факультетов университетов.

Табл. 4. Ил. 177. Библиогр. 186 назв.

Редакционно-издательский отдел АН СССР В. В. Феодосов.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Многочисленные замечания, полученные авторами по предыдущим изданиям книги (1-е издание — 1964 г., 2-е издание — 1967 г., 3-е издание — 1979 г.), а также ее переводов на английский язык в США (1966 г. и 1973 г.), способствовали уточнению текста и стимулировали частичное его обновление.

Авторы благодарны всем тем лицам, которые своими советами помогли улучшить эту книгу.

Я. Г. Павлова, Н. Н. Губанова

Ленинград — Рига, май 1985 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Устойчивости и колебания упругих систем посвящено много книг — учебников и монографий. Эта книга не отличается ни в том, ни в другом. Авторы писали ее как книгу для чтения, сборник очерков, посвященных избранному вопросу теории устойчивости и теории колебаний упругих и не вполне упругих систем. Соответственно этому книга разделена на две части, а каждый параграф посвящен своей отдельной теме, более или менее далеко выходящей за рамки обычных учебных курсов.

В части параграфов рассматриваются некоторые парадоксальные результаты и особые решения, большинство из параграфов посвящено современной проблематике — вопросам, которые локально обсуждаются в периодической литературе и ограничены в специальных монографиях, но пока не освещаются в учебниках (пересказаны в упругих

Яков Глебович Павлова, Надежда Николаевна Губанова

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

Редактор Н. П. Рейнгольд

Надписанный редактор Т. Н. Киселева

Технический редактор С. Я. Шапиро Корректор Г. А. Сорова

ИБ № 32419

Сдано в набор 10.05.85. Подписано в печать 12.10.85. Т-50000. Формат 64x100. Печать офсетная. Условный тиражный лист 14,48. Уч. изд. л. 16,9. Уч.-изд. л. 16,71. Тираж 9000 экз. Заказ № 9000. Цена 3 р. 50 к.

Издана Государственным издательством «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117871 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Сдана в печать издательством «Наука» и издательством «Совинформцентр»
Сдана в печать издательством «Наука» и издательством «Совинформцентр»
при Государственном издательстве СССР по делам издательства, полиграфии и книжного бизнеса. 117881 Москва В-34, Вавилова, 34

Составлено по 2-й авторской копии «Наука», 121800 Москва Г-64, Шубинский пер., 4. Заказ 365

П 170300000—003
—021/021—87—82-87

© Издательство «Наука»
Служба рекламы
Физико-математической литературы,
1979, 1987 г. перепечатки

системах, действии следящих нагрузок, задачи аэроупругости, вопросы фрикционных автоколебаний и самосинхронизации и т. п.). Здесь даны лишь первоначальные сведения, причем авторы стремились к предельно упрощенной и наиболее прозрачной постановке отдельных задач. Конечно, это придает изложению некоторую заковыку, но ее было очень трудно преодолеть в пределах скромного объема настоящей книги.

Таким образом, книга составлена из отдельных, довольно «острых» по содержанию рассказов; из-за этого не удалось добиться не только единого уровня сложности, но и равномерного ее возрастания. Книга рассчитана на широкий круг читателей, овладевших основами теоретической механики и сопротивлении материалов в объеме курсов высших технических учебных заведений, — студентов и аспирантов технических вузов, а также молодых инженеров, занимающихся расчетно-конструкторской и исследовательской работой.

Ссылки на литературу приведены в конце каждого параграфа и сопровождаются краткими комментариями.

Авторы глубоко признательны В. И. Феодосиеву и И. К. Сметко за ряд полезных замечаний, сделанных ими при ознакомлении с рукописью.

Большое внимание рукописи уделял Г. Ю. Джандиев; его ценные советы помогли устранить многие недостатки изложения. Этого замечательного человека и ученого не стало, когда производство книги близилось к концу. Авторы навсегда сохранят благодарную память о покойном.

Я. Г. Паново, Н. Н. Губанов

Рига, январь 1964 г.

Часть первая

УСТОЙЧИВОСТЬ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

ВВЕДЕНИЕ

Если позволительно перефразировать начало знаменитого романа Л. Н. Толстого, то можно сказать, что все устойчивые механические системы похожи друг на друга, а неустойчивые — неустойчивы по-своему. Это справедливо не только по отношению к устойчивости движения в широком смысле слова, но и применительно к более узкому понятию устойчивости равновесия.

Во многих случаях состояние равновесия упругой системы можно определить двумя параметрами — характерной перемещением σ и параметром нагрузки P . Тогда любой совокупности состояний равновесия соответствует некоторая кривая в системе осей σ, P ; она позволяет предсказать судьбу системы при монотонном возрастании параметра нагрузки (или параметра перемещения), увидеть области устойчивости и отметить критические значения параметров.

Из множества различных упругих систем можно выделить ряд типов, каждый из которых характеризуется некоторыми общими свойствами соответствующих кривых $P-\sigma$.

Остановимся на наиболее характерных случаях; при обсуждении поведения систем мы пока будем предполагать монотонное возрастание параметра нагрузки (мгновенное нагружение). В дальнейшем мы будем также рассматривать режимы кинематически задаваемого нагружения, характеризуемого монотонным возрастанием параметра перемещения σ (протекание, или жесткое нагружение), хотя при этом невозможно ввести устойчивости в обычном понимании этого термина.

1. При любом значении параметра нагрузки $P < P_{кр}$ существует единственная и крито устойчивая форма равновесия; при любых нагрузках, превосходящих значение

$P_{кр}$ есть несколько форм равновесия, в том числе и исходная (но уже неустойчивая) (рис. 0.1)^{*)}.

2. До некоторого значения нагрузки $P_{кр}$ существует единственная и притом устойчивая форма равновесия.



Рис. 0.1. Пример одной формы равновесия состояний системы первого типа



Рис. 0.2. Пример одной формы равновесия состояний системы второго типа

Интервалу значений нагрузки $[P_{кр}, P_{кр}]$ соответствуют три качественно различные формы равновесия: а) исходная, устойчивая; б) неустойчивая; в) устойчивая, резко отличающаяся от исходной.

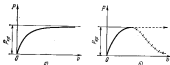


Рис. 0.3. Примеры одной формы равновесия состояний систем третьего типа: а) с одной формой равновесия при $P < P_{кр}$; б) с двумя формами равновесия при $P < P_{кр}$

При $P > P_{кр}$ формы равновесия а) и б) исчезают и существует только одна форма равновесия в) (устойчивая) — см. рис. 0.2.

3. До некоторого значения нагрузки $P_{кр}$ существует одна устойчивая форма равновесия (рис. 0.3, а); в некоторых случаях одновременно существует и вторая, резко

отличающаяся от исходной, неустойчивая равновесная форма (рис. 0.3, б). При $P > P_{кр}$ форм равновесия нет.

4. Исходная форма является единственной формой равновесия при любых значениях нагрузки, но при $P < P_{кр}$ она устойчива, а при $P > P_{кр}$ — неустойчива (рис. 0.4).

Говоря здесь об устойчивости форм равновесия, мы имеем в виду формы, устойчивые во малом, т. е. такие,

Рис. 0.4. Кривая равновесия постоянной системы четвертого типа



к которым система возвращается после сколь угодно малых начальных возмущений.

Для первого случая характерно разветвление (бифуркация) форм равновесия при критической нагрузке $P = P_{кр}$. Если рассмотреть процесс монотонного возрастания параметра нагрузки P в такой системе, то при $P = P_{кр}$ происходит переход в новую форму равновесия.

Во втором случае, когда при монотонном возрастании параметра нагрузки достигает значения $P_{кр}$, происходит резкий переход системы в новую качественную форму равновесия (перескок, скачок), после чего параметр δ будет вновь начинать возрастать. Если затем, начиная с некоторого значения $P > P_{кр}$, монотонно уменьшать параметр нагрузки P , то при $P = P_{кр}$ система совершит обратный перескок к исходной форме равновесия; при дальнейшем уменьшении нагрузки изображающая точка будет перемещаться вниз по начальному участку кривой. Состояния равновесия, отмеченные надписями участком кривой, неустойчивы и при рассмотренном способе нагружения вообще не реализуются. Любое состояние равновесия на последнем участке кривой в интервале $[P_{кр}, P_{кр}]$ устойчиво лишь во малом, так как при достаточно больших возмущениях смена форм равновесия (перескок) все же может произойти (неустойчивость во большом). Значения необходимых для перескока возмущений определяются абсциссами точек надписанного участка кривой $P-\delta$.

^{*)} В данном здесь и ниже иллюстрируются кривые $P-\delta$ идеальными состояниями системы.

В подобных случаях говорят о двух критических нагрузках — верхней $P_{кр1}$ и нижней $P_{кр2}$, определяющих переколы при нагрузке и разгрузке. В некоторых системах нижнее критическое значение равно нулю или даже отрицательно, что придает дополнительное своеобразие этим системам.

Третий случай характерен отсутствием состояний равновесия при $P > P_{кр}$; поэтому при достижении критической нагрузки происходит, строго говоря, не потеря устойчивости, а потеря равновесия — покой становится невозможным, а движение (даже без всяких возмущений) начинается. Состояния равновесия при $P < P_{кр}$ могут быть либо устойчивыми без ограничений (рис. 0.3, а), либо — если существует участок кривой $P-u$ — устойчивыми на малом (рис. 0.3, б). В последнем случае переход в движение может произойти и при $P < P_{кр}$, но для этого необходимы достаточно большие возмущения, определяемые абсциссами точек падающего участка.

В четвертом случае, хотя состояния равновесия и существует при $P > P_{кр}$, но вследствие неустойчивости она не реализуется — переход в движение неизбежен при сколь угодно малых возмущениях.

В некоторых особых случаях кривая равновесных состояний может иметь причудливую форму, подобную изображенной на рис. 0.5; здесь одному значению перемещения



Рис. 0.5. Одному значению перемещения могут соответствовать несколько значений силы

могут соответствовать несколько значений силы, но при монотонном возрастании параметра нагрузки никакие переколы, конечно, не произойдут.

Еще более своеобразны вопросы потери устойчивости не только упругих систем. Так, например, кривые $P-u$ для упругопластического стержня имеют вид, показанный на рис. 0.6. При учете эффекта ползучести влияние критической нагрузки исчезает, так как при любой нагрузке во времени некоторого критического значения, длитель-

ность которого зависит от нагрузки, характерные перемещение системы стремятся к бесконечности.

Разнообразие свойств механических систем и кривых $P-u$ до некоторой степени объясняет возмущение различных методов объяснения критических состояний. В течение долгого времени для этой цели служил статистический метод в трех его вариантах.

Исторически первым был вариант, предложенный Эйлером. Согласно методу Эйлера изучается возможность существования форм равновесия, смежных с исходной, при

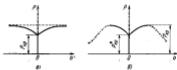


Рис. 0.6. Кривые состояния равновесия для упругопластического стержня

заданном значении нагрузки, причем возмущение смежной формы равновесия служит признаком неустойчивости исходной формы равновесия. Соответственно этому рассматриваются только сколь угодно малые отклонения от исходного состояния равновесия, и задача оказывается двудельной. Обычно методом Эйлера изучаются системы, для которых типично показанная на рис. 0.1 кривая $P-u$. При этом удается определить $P_{кр}$, но кривая точек равновесных состояний при $P > P_{кр}$ остается неизученной.

Для эйлеровой постановки задачи типична существенная идеализация системы; так, например, при изучении продольного изгиба сжатой стойки первоначально ось считается идеально прямой, а сжимающая сила — приложенной без эксцентриситета.

Во втором варианте статического метода в решение с самого начала вводятся те или иные неидеальности (несовершенства): начальные погрязи, начальные эксцентриситеты или дополнительные внешние силы; при решении часто пользуются линеаризованным уравнением. Так, для заданного продольного изгиба стойки получают кривую $P-u$, подобную показанной на рис. 0.3, а. Конечно, эти кривые получаются несколько разрывными в за-

возможности от принципа в решении неидеальностей, но положение горизонтальной асимптоты не зависит от начальных неидеальностей и определяет то же значение критической нагрузки, что и метод Эйлера. Некоторая условность этого подхода состоит в линеаризации задачи, хотя рассматриваются не малые перемещения.

Во многих случаях представляется более правильным строить кривую $P-\omega$ с учетом нелинейности, неизбежно проявляющейся при больших перемещениях. В сущности, именно это делается в исследованных системах с перекосами (рис. 0.2); для этих исследований характерен учет в первую очередь геометрической нелинейности*).

Третьим вариантом статического метода связан с теорией Лагранжа — Дирихле о минимуме потенциальной энергии. Этот энергетический метод оказался плодотворным для приближенного решения многих задач об устойчивости сложных систем, но он не может претендовать на универсальность, поскольку упомянутая теорема относится только к консервативным системам, тогда как действующие нагрузки не всегда имеют потенциал.

Хотя все статические методы часто приводят к одинаковым значениям критических параметров нагрузок, однако они не вполне эквивалентны одна другой, поскольку с их помощью получают ответы на не совпадающие по смыслу вопросы:

метод Эйлера: при какой нагрузке возникают смежные формы равновесия?

метод неидеальностей (в линеаризованной постановке): при какой нагрузке характерное перемещение системы стремится к бесконечности?

энергетический метод: до какого значения нагрузки потенциальная энергия системы сохраняет минимальные свойства в положении равновесия?

Главный же недостаток состоит в том, что статические методы иногда попросту неразумноупотребляемы. Полной общностью обладает только динамический метод исследования

устойчивости, который сводится к анализу свойств возмущенного движения, возникающего после нарушения исследуемого состояния равновесия. Если при этом движении система остается в окрестности состояния равновесия, то такое состояние устойчиво, а в противном случае — неустойчиво. Динамический метод уже давно вошел в теорию устойчивости упругих систем, но в течение длительного времени его (без оснований) рассматривали лишь как некий усложненный вариант подхода к проблеме устойчивости, который якобы должен дать результаты, не отличающиеся от результатов, полученных статическими методами. Лишь в двадцатых годах нашего столетия, после выяснения несоответствия статическим методам для некоторых классов задач, определялось подлинное значение вполне универсального динамического метода.

При раздвоении первой части этой книги на главы автор руководствовался признаком акцентированной общности свойств различных типов механических систем, и поэтому следующие четыре главы посвящены случаям, иллюстрированным выше рис. 0.1—0.4. В последней, пятой главе этой части рассматриваются достаточно специфические вопросы устойчивости не аномалии упругих систем.

Глава I ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОЯВЛЕНИИ СМЕЖНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ

Входящие в эту главу очерки посвящены упомянутому Эйлером случаю потери устойчивости в особенности метода Эйлера. В § 1 разбирается одна поучительная ошибка великого автора, которая носит частный характер, однако интересна не только как исторический курьез, но и как повод для полезного углубления в существа дела. Любопытна особенность одного из широко используемых вариантов энергетического метода разбирается в § 2. В § 3 обсуждается роль, которую могут играть некоторые дополнительные, обычно неучитываемые факторы (уточнение осей, сдвига). Наконец, в § 4 описывается случай потери устойчивости при нагрузках, значения которых меняются при изменении конфигурации упругой системы; в частности, здесь сделана попытка проанализировать потерю устойчивости несущих поверхностей летательных аппаратов (двигателей) и потерю устойчивости арматурной формы сей трубопроводов при достижении больших скоростей протекания жидкости.

* В задачах малых деформированного твердого тела различие нелинейности трех типов: 1) геометрическую — величина деформации, обусловленную при больших перемещениях, когда нелинейности, например, изгиба тела становятся существенными; 2) физическую — величина деформации, связанную с отклонением от линейного закона деформирования материала; 3) конструктивную — величина деформации, обусловленную включением для вычисления связей (упругих, стержневых балок) упругости материала, перемещениями площади контакта в задаче Грэнга и т. п.). Конструктивную нелинейность, как самостоятельную величину, отдельно выделял П. А. Лужко.

§ 1. Особня Эйлера

В 1727 г. двадцатипятилетний Эйлер прибыл из Швейцарии в Россию и до 1741 г. успешно работал в молодой Петербургской Академии наук. К концу этого периода в России сложились очень тяжелые условия для ученых Академии, в числе их ее иностранных членов постепенно покинула русскую столицу, «горючие слезы утратили» (по выражению Ломоносова). Эйлер переехал в Берлин, где стал вице-президентом Берлинской Академии наук; здесь Эйлер прожил 23 лет, но около половины написанных им за это время работ было опубликовано в трудах Петербургской Академии.

В 1766 г. Эйлер овладел на приглашение Екатерины II и вернулся в Петербург, где и прожил вплоть до своей кончины в 1783 г.; только за эти годы он написал более 400 научных работ. Академик С. И. Вавилов дал следующую оценку работе Эйлера в Петербургской Академии: «Вместе с Петром I и Ломоносовым Эйлер стал добрым именем нашей Академии, определявшим ее славу, ее честь, ее продуктивность».

Эйлер является основоположником теории устойчивости форм равновесия упругих систем. К этой проблеме он обращался неоднократно, начиная с 1744 г.; последняя из работ, посвященная вопросам продольного изгиба стержней, написана Эйлером в 1778 г., когда ему было более семидесяти лет.

В основополагающей работе 1744 г. Эйлер, исходя из точного дифференциального уравнения изогнутой оси, устанавливает значение критической силы для стержня по концам шарнирно опертой стойки.

В следующей публикации (1757 г.) он получает тот же результат, пользуясь линейно-возмущенным дифференциальным уравнением. Заключительная часть этой публикации посвящена задаче об устойчивости произвольной формы равновесия шарнирно опертой стойки, нагруженной не только концевыми сжимающими силами, но и продольно равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1.1). Однако далее на решение этой задачи содержалось существенное отступление.

Продвигая за выкладками Эйлера, приняв следующие обозначения: q — интенсивность распределенной нагрузки, P — сжимающая сила на верхнем конце стойки, z — абсцисса продольного сечения стойки, ξ — абсцисса произвольного сечения, расположенного в пределах $[0, z]$,

$v(z)$ — прогиб оси, $M(z)$ — изгибающий момент; кроме того, мы будем пользоваться старинными обозначениями EJ для изгибной жесткости, хотя в XVIII веке еще не сформировались понятия модуля упругости и момента инерции площади, и изгибная жесткость обозначалась одной буквой



Рис. 1.1. Стойка нагружена



Рис. 1.2. Прогнутая Эйлером стойка сгиб

так же как и сдвиг коэффициент с возрастанием соответствия.

Элемент нагрузки $q d\xi$ вызывает в сечении с абсциссой z изгибающий момент $-q d\xi [v(z) - v(\xi)]$; полный изгибающий момент в этом сечении равен сумме моментов всех сил, расположенных между верхним концом стойки и рассматриваемым сечением (рис. 1.2):

$$M(z) = - \int_0^z q[v(z) - v(\xi)] d\xi - P v(z). \quad (1.1)$$

С другой стороны,

$$M(z) = EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (1.2)$$

в интегро-дифференциальное уравнение возмущенной оси стержня принимает вид

$$EJ \frac{d^2v}{dz^2} + q \int_0^z [v(z) - v(\xi)] d\xi + Pv(z) = 0. \quad (1.3)$$

Если преобразовать интеграл, входящий в (1.3):

$$\int_0^z [v(z) - v(\xi)] d\xi = v(z)z - \int_0^z v(\xi) d\xi = -v(z)z + [zv(\xi)]_0^z + \int_0^z \xi \frac{dv}{d\xi} d\xi = \int_0^z \xi \frac{dv}{d\xi} d\xi, \quad (1.4)$$

то вместо уравнения (1.3) получим

$$EJ \frac{d^2v}{dz^2} + q \int_0^z \xi \frac{dv}{d\xi} d\xi + Pv(z) = 0, \quad (1.5)$$

или, после дифференцирования по координате z ,

$$EJ \frac{d^3v}{dz^3} + (qz + P) \frac{dv}{dz} = 0. \quad (1.6)$$

Заметим, что это уравнение непосредственно следует из выражения для перемещающей силы Q ; однако во времена Эйлера это выражение не было известно (дифференциальная зависимость между изгибающим моментом и перемещающей силой $Q = dM/dz$ была установлена лишь в середине XIX столетия).

Уравнение (1.6) имеет третий порядок, и поэтому его решение будет содержать три постоянных. Уже здесь возникает сомнения в правильности уравнения (1.6), так как решение, очевидно, должно удовлетворять четырем граничным условиям

$$v=0, \quad \frac{dv}{dz}=0 \quad \text{при} \quad z=0 \quad \text{и} \quad z=l. \quad (1.7)$$

Такого несоответствия числа граничных условий задачи и числа постоянных свидетельствует о неправомерности основного уравнения (1.6).

В чем состоит ошибка (если ее еще не заметил читатель), мы поясним ниже. Во всяком случае Эйлер сначала не обратил внимания на указанное несоответствие и продолжал решение, попросту оставив последние из граничных условий (1.7). Мы не будем проводить этого решения уравнения (1.6), так как оно было исследовано Эйлером для

случая, когда величина q мала; конечно, это решение ошибочно, хотя и приводит к первому значению критической силы $P_{кр}$ в предельном случае $q=0$.

В 1778 г. Эйлер вновь обратился к проблеме продольного изгиба. В рассмотренной выше задаче он принял, что в верхнем сечении сжимающей силы P нет, и исследовал решение дифференциального уравнения

$$EJ \frac{d^2v}{dz^2} + qz \frac{dv}{dz} = 0. \quad (1.8)$$

На этот раз допущенная при составлении уравнения ошибка оказалась самым чувствительным образом, а именно получилось, что ни при каких значениях нагрузки q не существует никаких форм равновесия, кроме прямолинейной. Отсюда Эйлер заключил, что такая стойка вообще не может потерять устойчивости.

Этот противоречащий здравому смыслу результат вызвал сомнения у самого Эйлера, и спустя всего несколько месяцев он выступил с критикой своей предыдущей работы. Вышла о неограниченной устойчивости стоек, нагруженных собственным весом, Эйлер написал еще только парадоксальным, но и весьма позитивным и утверждал, что полученное им ранее аналитическое решение, очевидно, содержит ошибку. Однако в чем состоит ошибка, Эйлер еще не видел.

Лишь в следующей публикации, опубликованной в том же 1778 г., Эйлер полностью разъяснил дело. Он заметил, что при составлении выражения (1.3) пропущен момент, создаваемый горизонтальной реакцией N . Если $q=0$, то горизонтальных реакций в самом деле не будет; однако при $q \neq 0$ наличие горизонтальных реакций неизбежно следует из условий равновесия всей стойки (рис. 1.3). Если учесть горизонтальную реакцию, то вместо уравнения (1.8) получится правильное дифференциальное уравнение

$$EJ \frac{d^2v}{dz^2} + qz \frac{dv}{dz} = N. \quad (1.9)$$



Рис. 1.3. Система сил, действующая на стойку при продольном изгибе

Поскольку величина N неизвестна, то ее можно рассматривать как четвертую постоянную — ту, которой ранее не хватало для удовлетворения всем четырем граничным условиям задачи. Дальнейшее решение Эйлера строит в виде степенного ряда; хотя в выкладках Эйлера вкралась ошибка чисто вычислительного характера, однако результат опроверг прежний вывод о неограниченной устойчивости рассмотренной стойки.

Правильное решение $\frac{4\pi^2 P}{EJ} = 18,6$ было получено спустя почти полтора столетия А. Н. Динником *).

Подробный анализ работ Эйлера по теории продольного изгиба был дан в 1838 г. Е. Л. Николаи **); в его статье, где подробно изложена и приведенная выше история, есть следующие слова: «Парадокс, с таким блеском разъясненный Эйлером...», поучителен и заслуживает внимания. Решение этого парадокса состоит, как мы видим, в том простом замечании, что если свобода перемещения концов стержня в поперечном направлении стеснена какими-либо условиями, то к концам стержня должны быть приложены соответствующие поперечные реакции. Это обстоятельство упускается иногда из виду. С ошибкой, первоначально допущенной Эйлером в памфлете 1757 г. и разъясненной им в 1778 г., мы неоднократно встречаемся вновь в истории теории устойчивости упругих систем. Так, в задаче об устойчивости стержня, подвергающегося одновременно сжатию и кручению, мы находим эту же погрешность в работах Гринхилла и Гринельта.

По поводу ошибок Эйлера см. также Е. Л. Николаи «Труды по механике» (М.: Гостехиздат, 1958, с. 452—453).

§ 2. Об одном варианте применения энергетического метода

Энергетический метод был введен в теорию упругости Кирхгофом ***) в 1850 г. и применен в задачах теории упру-

*) Александр Николаевич Динник (1870—1950) — академик Академии наук УССР (в 1929 г.), в 1946 г. избран действительным членом Академии наук СССР. Наиболее крупное исследование А. Н. Динника связано с проблемой устойчивости упругих систем, а также с задачей об упругой теории упругости.

***) Евгений Леопольдович Николаи (1860—1954) — с 1917 г. профессор Ленинградского инженерно-технического института. Ему принадлежит ряд важных результатов в теории устойчивости в колебаний упругих систем.

****) Густав Роберт Каргофф (1828—1887) — профессор факультета Гейдельбергского (1864—1875) и Берлинского (1875—1887) университетов.

гой устойчивости Брайаном (1891) и С. П. Тимошенко *) (1906). Энергетический метод основан на теории Лагранжа — Диракка для консервативных систем, поданныхными голономными, стационарными в идеальном смысле; если в положении равновесия системы потенциальная энергия имеет минимум, то положение равновесия устойчиво.

Ниже рассматривается о парадокс, который возникает в одном из вариантов применения метода.

Напомним основную идею энергетического метода, следуя книге С. П. Тимошенко «Устойчивость упругих систем» (М.: Гостехиздат, 1955, с. 91), где рассматривается каноническая стойка, изображенная на рис. 2.1, а:

«Допустим, что произошло боковое смещение, показанное на рис. 2.1, б; тогда энергия деформации увеличивается вследствие того, что к энергии сжатия прибавляется энергия изгиба стержня. В то же время потенциальная энергия нагрузки уменьшается пропорционально с понижением точки приложения. Это уменьшение потенциальной энергии является просто работой, произведенной нагрузкой в результате понижения верха стержня. Если ΔU означает энергию деформации изгиба стержня, а ΔT — работу, произведенную нагрузкой вследствие изгиба, то можно сделать заключение, что прямая форма сжатого стержня будет устойчивой, если

$$\Delta U - \Delta T > 0;$$

она будет неустойчивой, если

$$\Delta U - \Delta T < 0.$$

тета. С 1893 г. — член-корреспондент Петербургской Академии наук, с 1879 г. — член Берлинской Академии наук. Автор многих исследований по математической физике и теории упругости.

*) Степан Прохорович Тимошенко родился в 1878 г. на Украине, в с. Бив, Черкасской губ. В 1906—1911 гг. — профессор Киевской политехнической институте, в 1912—1917 гг. — профессор, кафедра и политехнического институте в Петербурге. В 1918—1930 гг. — первый директор Института механики Академии наук Украины. В 1930 г. переехал в Югославию, а в 1952 г. переехал в США, где был профессором университета Мичиганского, а затем Слоуборнского университетов. Умер в г. Вуприерли (ФРГ) в 1972 г. Автор многих работ по строительной механике, классической теории упругости, нелинейной теории колебаний и др.

Был избран членом академий наук ряда стран: Украинской Академии наук (Киев, 1918), Югославской Академии наук (Дубровник, 1928), позднее — иностранный член АН СССР, Польской Академии наук (Варшава, 1955), Французской Академии наук (Париж, 1959), Американской Академии наук (Вашингтон, 1940), Индийского королевского общества (1944), Итальянской Академии наук (Рим, 1948) — и почетным доктором многих университетов и институтов.

Критическое значение нагрузки, при котором прямоугольная форма равновесия переходит из устойчивого состояния в неустойчивое, определяется из уравнения $\Delta V = \Delta T$.

В соответствии с основной идеей энергетического метода для вычисления ΔV и ΔT нужно исходить из определенных,

заранее принятых предположений об отклоненной конфигурации стержня; при этом «возмущающая» форма изогнутой оси должна быть замечена с учетом фактически граничных условий.

В решении С. П. Тимошенко принимается, что изогнутая ось описывается уравнением

$$v = l \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right), \quad (2.1)$$

где l — прогиб верхнего конца стержня.

Поставкой можно убедиться в том, что (2.1) удовлетворяет всем граничным условиям задачи:

$$v = 0 \text{ и } v' = 0 \text{ при } x = 0, \\ v = l \text{ и } v' = 0 \text{ при } x = l.$$



Рис. 2.1. Прогнутый стержень высшей стержня

Нагибающий момент в произвольном поперечном сечении равен

$$M = P(l - v) = Pl \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad (2.2)$$

а соответствующая энергия изгиба

$$\Delta V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{\pi^2 Pl^3}{48EI}. \quad (2.3)$$

Вертикальное смещение верхнего конца стержня

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 Pl}{16EI}; \quad (2.4)$$

следовательно, работа, произведенная силой P , при изгибе стержня,

$$\Delta T = \frac{\pi^2 P^2 l}{16EI}. \quad (2.5)$$

Приравняв ΔV и ΔT :

$$\frac{\pi^2 Pl^3}{48EI} = \frac{\pi^2 P^2 l}{16EI}, \quad (2.6)$$

С. П. Тимошенко находит, что критическая сила равна

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{3l}. \quad (2.7)$$

Этот результат совершенно точен; полный успех примененный здесь приближенного метода объясняется тем, что функция (2.1) представляет собой точное уравнение изогнутой оси. При решении других задач, когда уравнение изогнутой оси заранее неизвестно, этот путь приводит к приближенным результатам, тем более точным, чем лучше аппроксимирующая функция описывает действительную форму изогнутой оси.

В 1951 г. П. Ф. Дроздов обратил внимание на неожиданный результат, который получается, если сравнить найденные выше величины ΔV и ΔT сначала при $P < P_{кр}$, а затем при $P > P_{кр}$.

Обозначив через

$$\alpha = P/P_{кр} \quad (2.8)$$

безразмерный параметр нагрузки; при этом $\alpha < 1$, если $P < P_{кр}$, и $\alpha > 1$, если $P > P_{кр}$. Пользуясь безразмерным параметром α , переищем формулы (2.3) и (2.5) с учетом (2.7) в следующем виде:

$$\Delta V = \alpha^2 \frac{\pi^2 EI^3 P}{64EI}, \quad (2.9)$$

$$\Delta T = \alpha \frac{\pi^2 EI^3 P}{32EI}. \quad (2.10)$$

Отсюда ясно, что при $\alpha < 1$ имеем $\Delta V - \Delta T < 0$, а при $\alpha > 1$ найдем $\Delta V - \Delta T > 0$. Получается, что при $\alpha < 1$ (когда $P < P_{кр}$) предположенная форма равновесия должна быть энергетически неустойчивой, а при $\alpha > 1$ (когда $P > P_{кр}$) — устойчивой. Иными словами, решение С. П. Тимошенко дает значение критической силы как силы, превышение которой делает любую неустойчивую произвольную форму равновесия устойчивой.

Это заключение находится в очевидном противоречии с утверждением на с. 17 утверждением С. П. Тимошенко, да и просто со здравым смыслом. В чем же причина этого неожиданного результата? П. Ф. Дроздов справедливо заметил, что она связана с выражением (2.3). Дело

в том, что в выражении

$$\Delta V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (2.11)$$

величину M следует понимать как изгибающий момент, определяемый деформациями оси (ее кривизной) в смежных, вообще говоря, неравновесных состояниях

$$M = EJ \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (2.12)$$

тогда как использованное С. П. Тимошенко выражение (2.9) относится к одному равновесному состоянию.

Если в (2.11) подставить (2.12), то с учетом (2.1) получится вместо (2.3)

$$\Delta V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{\pi^2 E J^3 P^2}{4l^3}. \quad (2.13)$$

Этот результат, в отличие от выражения (2.9), не содержит параметра α , т. е. не зависит от силы P .

Окончательные выражения (2.3) (или (2.9)) и (2.13) в рассмотренной задаче не эквивалентны по своей сути природе. Первое из них выражает потенциальную энергию изгиба для изогнутой равновесной формы, тогда как выражение (2.13) определяет потенциальную энергию изгиба для произвольного отклоненного состояния, возможно, не являющегося состоянием равновесия.

В своей статье П. Ф. Дродзов пишет: «По смыслу начала возможных перемещений и принципа минимума потенциальной энергии работа внутренних сил на виртуальном отклонении не зависит от величины груза P и великом определяется произвольно заданной формой изгиба. При этом в рассматриваемом отклоненном состоянии равновесие может и не сохраниться, и момент внутренних сил, определяемый формой изгиба, может отличаться от момента внешних сил».

Если теперь сопоставить верные выражения (2.10) и (2.13), то получится правильный результат:

$$\Delta V > \Delta T \quad \text{при } \alpha < 1 \quad (\text{т. е. при } P < P_{кр1}),$$

$$\Delta V < \Delta T \quad \text{при } \alpha > 1 \quad (\text{т. е. при } P > P_{кр1}).$$

Таким образом, выкладки С. П. Тимошенко основаны на рассмотрении смежного равновесной формы, для которой

выражения (2.3) и (2.12) совпадают. Но в таком случае потенциальная энергия системы задана одинаково как для исходной, так и для отклоненной форм. Поэтому выкладки С. П. Тимошенко привели к верному результату для критической силы; в то же время попытка вывести этот способ, что происходит при достижении силой P значения $P = P_{кр1}$ (приход ли ее устойчивого состояния к неустойчивому или наоборот), заранее обречена на неудачу. К счастью, в подобных случаях правильный ответ подсказывает интуиция.

В то же время трудно признать, что, задаваясь приближенной формой изгиба и пользуясь затем способом Тимошенко, мы получим более точное значение критической силы, так как операция дифференцирования, указанная в выражении (2.12), всегда усугубляет ошибку решения.

Статья П. Ф. Дродзова была опубликована в журнале «Вестник политеха» в декабре 1953, № 2. В этой статье даны ссылки на другие издания, в которых материал по же проблеме. Анализ рассмотренного периода содержится также в книге С. Д. Лейбензон «Устойчивость систем стержней» (М.: Гостехиздат, 1954, § 8).

§ 3. Об уточненных формулах Эйлера

При плоской деформации стержня упругие перемещения его точек зависят от жесткости трех концов: жесткости при изгибе EJ , при сдвиге GF и при растяжении — сжатии EF . Однако в работах Эйлера по устойчивости стержней была учтена только изгибная податливость, а жесткости при сдвиге и при растяжении полагались бесконечно большими. Велика ли ошибка при этом допущении? Нужно ли уточнять решение Эйлера и применять его именно укорочение оси стержня при его нагружении от нуля до критического состояния, а также сдвига, возникающего при переходе стержня в изогнутое состояние?

Первая равнина формулы Эйлера

$$P_{кр1} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \quad (3.1)$$

(l — длина стержня, μ — коэффициент длины, зависящий от способа закрепления концов стержня) была предпринята в 1894 г. Энгессером^{*)}, который также предсказал укорочение оси, но приблизительно учет влияния сдвига. При этом

^{*)} Фридрих Энгессер (1848—1931) вел практическую работу на строительстве железных дорог в западной многолюднейшей провинции в области строительной механики. В 1885—1915 гг. был профессором кафедры теории сооружений в Карлсруэ.

Энгессер получил следующее выражение для критической силы:

$$P_{кр} = \frac{P_{кр}^0}{1 + \frac{v^2 \beta_0^2}{GF}}, \quad (3.2)$$

в котором λ — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения (для прямоугольного сечения $\lambda=1,20$). Сильным порядком величины второго слагаемого знаменателя

$$\lambda P_{кр}^0(GF) \sim P_{кр}^0(EF) \sim v_{кр}^2$$

Как видно, это слагаемое имеет порядок относительного укорочения оси при сжатии стержня критической силой. Отсюда как будто вытекает, что вывод формулы Энгессера не вполне логичен: одновременно со сдвигами следовало бы учесть поперечные деформации (а также имеющие тот же порядок изменения моменты инерции поперечного сечения вследствие поперечного расширения при продольном сжатии). Но обе эти поправки весьма малы и вряд ли могут изменить значение критической силы больше чем на сотни доли процента. Если же вспомнить, что в самом законе Гука содержится еще большая погрешность, то спешит засиять — самое лучшее вообще пренебречь названными малочисленными слагаемыми.

Именно так и поступают при анализе устойчивости сплошных стержней из изотропных материалов. Но формула Энгессера была выведена вовсе не для этих случаев, а рассчитана на проволочку с составными стержнями типа решетчатых стоек. При этом составной стержень условно заменяется эквивалентными сплошным стержнем, а величина GF/λ формально описывает эквивалентную жесткость конструкции, в действительности обусловленную местным изгибом ветвей. Так как при переходе к эквивалентному стержню можно вычислить только комплекс GF/λ , то обоснование вопроса о критич. порогам величин G , P и v вообще лишено смысла.

Расчеты показывают, что для составных стоек названного типа второе слагаемое в знаменателе (3.2) соизмеримо с единичной, так что критическая сила существенно отличается от значения $P_{кр}^0$.

В последнее время в выражении типа (3.2) обращаются и в тех случаях, когда рассчитываются на устойчивость сплошного стержня или колонны; сплошной стержень состоит из двух крайних несущих тонких слоев из высокопрочного и относительно жесткого материала (металла,

стекло- или углепластика) в толстом среднем слое — значительно менее жесткого наполнителя, который должен обеспечить совместную работу всего пакета. В этих случаях в (3.2) следует подставлять модуль сдвига наполнителя; поскольк у он относительно невелик, поправка к значению критической силы может оказаться довольно заметной.

Поисков об эквивалентном стержне может быть проделано и при анализе устойчивости сжатых в г т к и р у ж и н. В отличие от упомянутых выше случаев, при сжатии таких пружин происходит заметная осадка; поэтому нужно учесть, что длина оси эквивалентного стержня в момент поворота устойчивости отличается от начальной длины. Хотя в общей теории устойчивости сжатых ветвей пружин следует также учитывать их сдвиговую податливость (как и для составных стержней), но мы здесь ограничимся анализом поворота только на изменение длины оси эквивалентного стержня.

Итак, действуя, что речь идет о потерье устойчивости сжатого стержня, характеризуемого жесткостями EJ и EF . При выводе дифференциального уравнения, описывающего равновесную форму изогнутой оси стержня, нужно исходить из уточненного выражения длягибающего момента

$$M = EJ\kappa(1-\epsilon), \quad (3.3)$$

в котором $\epsilon = P/(EF)$ — относительное укорочение оси в предкритическом состоянии, κ — кривизна оси, которую можно записать в виде $\kappa = u''$. Рассматривая, например, случай стержня с шарнирно закрепленными концами, когда $M = -Pz$, приходим к дифференциальному уравнению

$$u'' + \sigma^2 u = 0,$$

в котором

$$\sigma^2 = \frac{P}{EJ(1-\epsilon)}. \quad (3.4)$$

Далее находим общее решение

$$u = C_1 \sin \sigma z + C_2 \cos \sigma z.$$

Подняв его граничным условиям (начало координат совпадает с исполненным концом)

$$u(0) = 0, \quad u[l_0(1-\epsilon)] = 0,$$

получим

$$\sigma l_0(1-\epsilon) = n.$$

Подставляя сюда (3.4), найдем соотношение

$$\rho = \frac{\lambda^2 EI}{4(1 - P_0 EI^2)}$$

которое представляет собой квадратное уравнение относительно критической силы. Найденный корень этого уравнения можно представить в виде $P_{кр} = \beta P_0$, где

$$\beta = \frac{\lambda^2}{2EI} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4EI^2}{\lambda^2}} \right)$$

($\lambda = l_0 \sqrt{P_0}$ — гибкость эквивалентного стержня). На рис. 3.1 показан график изменения коэффициента β

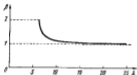


Рис. 3.1. Зависимость коэффициента критической силы β от гибкости стержня

в зависимости от гибкости λ . Любопытно, что при $\lambda < 2l_0$ вещественных значений критической силы не существует, т. е. потеря устойчивости вообще невозможна. Причина состоит в том, что благодаря существенному уменьшению длины (при возрастании сжимающей силы) стержень как бы усиливает от сжатости потерю устойчивости. Здесь имеет значение, что в 1946 г. Н. А. Черпаков исследовал устойчивость витой пружины при сжатии, но при этом не учитывал эквивалентного стержня и рассматривал пружину как пространственный стержень с осью в форме арки. При этом, в частности, установлено, что существуют пружины, не теряющие устойчивости.

Итак, применен к формуле Эйлера имеет практический смысл только в тех случаях, когда используется эквивалентная стержневая модель более сложной конструкции, обладающей заменой податливостью при сдвиге и (или) сжатии; для обычных стальных стержней в этих поправках нет необходимости.

Вывод формулы Эйлера —, например, в книге С. П. Тимошенко «Устойчивость упругих систем» (М.: Гостехиздат, 1953), где также приведены данные в 1925 г. Белено в Коном теории устойчивости скрутки стержня. Подсказывает Н. А. Черпакова воспроизведено в книге «Расчет на прочность и жесткость» под ред. С. Д. Пономарева (М.: Наука, 1960, т. III, гл. XXIV). Впервые упомянут она отмечено во втором издании книги книги о сдвиге; но ошибки сдвиге с параметром (3.2) и была исправлено в статье д-тора, опубликованной в 1948 г. (Инженерный журнал, Москва) первого тома, 1948, № 2).

Вспомогательная формула в разделе параграфа, с большой ответственностью отмечено в книге Н. А. Абулова «Общие расчеты на устойчивость упругих систем» (М.: Машиностроение, 1958).

§ 4. Нагрузки, зависящие от перемещений

Для того чтобы уловить специфику рассматриваемых здесь задач, нужно сразу отказаться от некоторых предположений, привычных к которым несомненно обычной постановкой задач теории упругости и сопротивлении материалов. В большинстве таких задач нагрузка тем или иным образом задана. При этом считается, что упругий перемещение зависят от нагрузки, но сама на нагрузку не влияют.

Существует, однако, обширный класс задач, для которых типично взаимозависимые нагрузки и перемещений: не только перемещения зависят от нагрузки, но и сами нагрузки меняются в зависимости от перемещений. Такие нагрузки не остаются безучастными к изменению координат точек системы и как бы «следуют» за этими изменениями.

В частности, можно выделить два типа следующих нагрузок.

К первому относятся нагрузки, направление которых задано и неизменно, но значения тем или иным образом меняются при перемещении системы. Здесь мы имеем в виду именно нагрузки, т. е. активные силы, а не реакции (например, реакции упругих опор, которые тоже зависят свое значение в зависимости от их осадки). Особенностью рассматриваемых здесь нагрузок является совпадение их направления с направлением перемещения (упругие реакции направлены всегда противоположно перемещению соответствующих точек системы).

Второй тип охватывает случаи, когда за перемещениями упругой системы следуют направления нагрузок.

Как оказывается, различия между этими типами задач весьма существенны и каждый из них целесообразно рассматривать отдельно. В рамках настоящего параграфа мы

ограничимся только задачами первого типа (задачи второго типа обсуждаются ниже, в гл. IV).

Вот, например, две задачи, поставленные в одном задании по сопоставлению материалов.

1. Балка постоянного сечения закреплена одним концом; на свободном конце в случае возникновения прогиба начинает действовать сила, пропорциональная прогибу: $P=cf$. Определить наименьшее значение коэффициента c , при



Рис. 4.1. Кантованная балка под действием силы, пропорциональной прогибу свободного конца

котором прямоугольная форма балки будет неустойчивой. Жесткость балки EJ , длина l (рис. 4.1).

2. Балка, имеющая постоянную жесткость EJ и длину l , шарнирно опирается по концам. При возникновении прогиба начинает действовать распределенная по всей длине балки нагрузка, пропорциональная прогибу: $p=ky^2$.

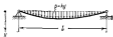


Рис. 4.2. Двухпролетная балка под действием нагрузки, интенсивность которой пропорциональна прогибу

Определить наименьшее значение коэффициента k , при котором прямоугольная форма балки станет неустойчивой (рис. 4.2).

В этих системах нагрузки реагируют на линейные перемещения, пропорциональны им и совпадают с ними по направлению.

В зависимости от физической природы рассматриваемых здесь сил (или моментов) они могут определяться не прогибом, как в только что приведенных задачах, а угловыми перемещениями или кривизной оси стержня.

* В этом параграфе было бы полезно обозначать перемещение буквой s (тогда будет обозначаться кривизна).

Все эти случаи последовательно иллюстрируются в настоящем параграфе, причем каждый раз высказывается уверенность, что возникшие случаи состоят в нейтральном равновесии и потери устойчивости в эйлеровом смысле вовсе не обязательно связаны с традиционным представлением о продольном изгибе стержня.

а. Силы, пропорциональные перемещениям (потери устойчивости стержня, находящегося в магнитном поле). Силы магнитного притяжения имеют свое значение в зависимости от расстояния между магнитом и якорем; поэтому, если последний упруго закреплен и может перемещаться, то эти силы представляют собой нагрузку, следующую за угловым перемещением.

Смысла рассмотрен точечный якорь, находящийся в стационарном магнитном поле, симметричном относительно среднего положения. Такое поле может быть создано двумя магнитами, как это показано на рис. 4.3.

Статическую характеристику упругой системы якоря будем считать линейной, а коэффициент жесткости — равным c ; при отклонении якоря от положения равновесия возникает упругая восстанавливающая сила, равная $-cy$ и направленная в сторону, противоположную отклонению.

Силы притяжения магнитов уравновешены только тогда, когда якорь находится в своем среднем положении ($y=0$). При перемещении якоря силы притяжения магнитов изменяются, но в равной мере. При малых перемещениях можно принять, что значение сил притяжения каждого из магнитов зависит от координаты y следующим образом:

$$P_1 = \frac{K}{(a+y)^2}, \quad P_2 = \frac{K}{(a-y)^2},$$

где a — начальное расстояние между магнитами и якорем, K — постоянная; равнодействующая этих сил равна

$$R = \frac{K}{(a-y)^2} - \frac{K}{(a+y)^2} = \frac{4ayK}{(a^2-y^2)^2}$$



Рис. 4.3. Упруго закрепленный якорь в симметричном магнитном поле

и направлена в сторону перемещения. При весьма малых отклонениях $(\varphi \ll \alpha)$ можно приближенно принять

$$R \approx \frac{4K\varphi}{\alpha^2}. \quad (4.1)$$

Согласно этому линеаризованному выражению равнодействующая сила притяжения магнитов пропорциональна смещению y .

Вообразим себе, что вследствие какой-либо случайной причины якорь выведен из среднего положения. Соответственно дальнейшей конции нужно выяснить, является ли отклоненное состояние состоянием равновесия. Условие равновесия якоря

$$-cy + \frac{4K\varphi}{\alpha^2} = 0$$

позволяет заключить, что при коэффициенте жесткости c , равном

$$c_{cr} = \frac{4K}{\alpha^2}, \quad (4.2)$$

возможно отклоненное состояние равновесия, т. е. происходит потеря устойчивости.

При этом критическое значение коэффициента жесткости восстанавливающая сила упругого стержня составляет $-c_{cr}y = -4Ky/\alpha^2$, т. е. в точности уравновешивает силу R . Если $c > c_{cr}$, то исходное состояние равновесия якоря устойчиво. Если же $c < c_{cr}$, это состояние неустойчиво: при любом малом отклонении равнодействующая сила притяжения магнитов оказывается большей, чем восстанавливающая сила упругого стержня, и после начального возмущения якорь будет все дальше уходить от исходного положения вплоть до полного выравнивания в одну из сторон.

Рассмотрим теперь систему с распределенными параметрами — консольный упругий стержень (рис. 4.4), на который действует распределенная нагрузка

$$r = \frac{4K\varphi}{\alpha^2} \quad (4.3)$$

($\varphi = y(\alpha)$ — угол в произвольном сечении). Такая нагрузка может быть создана двумя рядами магнитов, часто расположенных вдоль стержня с двух его сторон. Дифференциальное уравнение изгиба стержня

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{4K\varphi}{\alpha^2}$$

решением в виде

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \alpha^4 y = 0, \quad (4.4)$$

где

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{4K}{EI\alpha^2}}. \quad (4.5)$$

Общее решение уравнения (4.4) содержит четыре постоянные и имеет вид

$$y = A_1 \operatorname{sh} \alpha x + A_2 \operatorname{ch} \alpha x + A_3 \sin \alpha x + A_4 \cos \alpha x. \quad (4.6)$$

Это решение должно удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0 & \text{ при } x = 0, \\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0 & \text{ при } x = l. \end{aligned}$$

Подставляя сюда решение (4.6), находим

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 = 0, \\ A_3 + A_4 = 0, \\ A_1 \operatorname{sh} \alpha l + A_2 \operatorname{ch} \alpha l - A_3 \sin \alpha l - A_4 \cos \alpha l = 0, \\ A_1 \operatorname{ch} \alpha l + A_2 \operatorname{sh} \alpha l - A_3 \cos \alpha l + A_4 \sin \alpha l = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Полученная система уравнений (4.7) однородна относительно постоянных и поэтому удовлетворяется тривиальным решением

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0.$$

Но такому решению соответствует функция $y=0$, что подтверждает очевидный факт — прямоугольные формы есть формы равновесия. Чтобы найти искривленную форму равновесия, нужно предположить, что не все постоянные A_i равны нулю; система уравнений (4.7) имеет ненулевые решения лишь при условии, что равен нулю ее определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} \alpha l & \operatorname{ch} \alpha l & -\sin \alpha l & -\cos \alpha l \\ \operatorname{ch} \alpha l & \operatorname{sh} \alpha l & -\cos \alpha l & \sin \alpha l \end{vmatrix} = 0.$$

Размеру определитель, приведем к следующему трансцендентному уравнению:

$$\cos \alpha l \cdot \operatorname{ch} \alpha l = -1. \quad (4.8)$$

На рис. 4.5 дано графическое решение этого уравнения; его наименьший корень равен

$$\alpha' = 1,675. \quad (4.9)$$

Подставляя сюда выражение (4.5), получим критическое соотношение между параметрами системы

$$\frac{H^2}{EJ^2} = 3,0699, \quad (4.10)$$

при котором наступает потеря устойчивости.

При найденном значении α' можно получить из (4.6) следующее уравнение нагрузки ось:

$$y = A_1 [\sin \alpha z - \sin \alpha z' - 1,3622 (\sin \alpha z - \cos \alpha z)],$$

содержащее единственный неопределенный параметр A_1 , характеризующий масштаб кривой изгиба. Так, принимая



Рис. 4.4. Угнутый стержень в аэродинамическом потоке

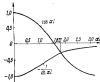


Рис. 4.5. Графическое решение трансцендентного уравнения (4.6)

$A_1 = -0,3671$, мы получим кривую с единичной ординатой при $z=1$:

$$y = 0,3671 (\sin \alpha z - \sin \alpha z') + 0,5 (\sin \alpha z - \cos \alpha z).$$

6. Силы, пропорциональные углам поворота (аэродинамическая жесткость). К рассматриваемой здесь категории нагрузок относятся аэродинамические нагрузки (например, нагрузки на крыло летящего самолета), которые реагируют на изменение положения и формы обтекаемого конструктива.

В то время как при *прямо*е вращении (нагрузки на упряжке перемещения) изучается методами теории упругости или сопротивления материалов, *обратно*е вращение

(перемещеный на нагрузки) определяется законами гидродинамики. Потому задача о поведении деформируемых конструкций в потоке воздуха (жидкости) невозможно решить только методами теории упругости или только методами гидродинамики; такие задачи лежат на стыке обеих наук и ныне относятся к самостоятельной научной дисциплине — теории аэроупругости. Разумеется, что чем глубже конструкция, тем с большей отчетливостью вырисовывается специфика гидродинамических или аэродинамических явлений.

Среди различных аэроупругих явлений особое место занимает различные виды потери устойчивости авиационных конструкций. Некоторые из задач этого класса допускают чисто статическую постановку в духе концепции Эйлера; здесь мы остановимся именно на таких задачах, относящихся к проблеме дивергенции несущих поверхностей летательных аппаратов.

Начнем с элементарных случаев из области прикладной аэродинамики и рассмотрим простейшую схему — обтекание совершенно жесткой весьма длинной прямоугольной пластинки потоком воздуха. Ось x совмещена с длиной

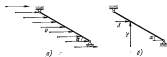


Рис. 4.6. Система действия возмущающих веток на неподвижную пластинку

сторонами пластинки, а ось y — с направлением потока; на рис. 4.6, а изображено сечение пластинки, перпендикулярное оси x .

Угол α между направлением потока и плоскостью пластинки называется углом атаки. Направленная суммарной аэродинамической нагрузкой на пластинку не совпадает с направлением потока; кроме составляющей X по направлению скорости потока, возникает составляющая Y , перпендикулярная скорости потока. Первая составляющая называется лобовым сопротивлением, а вторая — подъемной силой (рис. 4.6, б). Они зависят от площади пластинки S , возмущающей действием нагрузки, плотности воздуха ρ , скорости потока v и угла атаки α .

Установлено, что при умеренных скоростях (не превосходящих 0,6—0,7 скорости распространения звука в воздухе) подъемная сила определяется выражением

$$Y = c_p \frac{\rho v^2}{2} S,$$

Где $\rho v^2/2$, входящая в эту формулу, называется скоростью динамиче и представляет собой кинетическую энергию единицы объема воздуха. Коэффициент подъемной силы c_p при малых углах атаки пропорционален углу атаки α :

$$c_p = \frac{d c_p}{d \alpha} \alpha,$$

где $d c_p / d \alpha$ — угловой коэффициент прямой, характеризующей изменение коэффициента c_p . Таким образом, подъемная

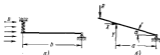


Рис. 4.7. Силы действия воздушного потока на упруго изгибающую пластину; начальный угол атаки равен нулю

сила Y также пропорциональна углу атаки α . Аналогично определяется и лобовое сопротивление X .

Обратимся теперь к простейшей задаче теории аэроупругости — обтеканию весьма тонкой жесткой пластины, упруго опираемой левой кромкой; будем считать, что невозмущенным является горизонтальное положение пластины (рис. 4.7, а). В этом положении она вообще не нагружена, так как $\alpha=0$ и вместе с этим $X=Y=0$. Однако это состояние равновесия может оказаться неустойчивым при достаточно большой скорости v потока, поскольку при отклонениях пластины (рис. 4.7, б) возникает подъемная сила, возможно, способная удержать пластину в отклоненном положении.

Если b — ширина пластины, а l — длина, то $S=bl$ и подъемная сила Y , разнаяющаяся при отклонении пластины на угол α , равна

$$Y = \frac{d c_p}{d \alpha} \frac{\rho v^2}{2} M \alpha,$$

Резанте упругой опоры при малом угле α составляет

$$R = \alpha b l,$$

где α — коэффициент жесткости опоры, рассчитанный на единицу длины пластины.

Выясним, при каких условиях возможно равновесие пластины в отклоненном положении. Условно равновесия пластины в отклоненном положении (рис. 4.7, б) имеет вид

$$c \alpha^2 l^3 - \frac{d c_p}{d \alpha} \frac{\rho v^2}{2} M \alpha \cdot \alpha = 0,$$

где α — плечо подъемной силы, которое приблизительно будем считать не зависящим от угла атаки. В это уравнение не включен момент силы лобового сопротивления X , так как ее плечо αl — величина малая по сравнению с плечом силы Y . Таким образом,

$$c \alpha^2 l^3 \left(c - \frac{\rho v^2}{2} \frac{d c_p}{d \alpha} \right) = 0. \quad (4.11)$$

Структура последнего выражения свидетельствует о возможности отклоненного состояния равновесия, когда $\alpha \neq 0$. Для этого необходимо, чтобы равнялось нулю выражение в скобках, входящее в уравнение (4.11):

$$c - \frac{\rho v^2}{2} \frac{d c_p}{d \alpha} = 0. \quad (4.12)$$

Если задано значение c , то из (4.12) можно найти критическую скорость потока

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{2 c b}{\rho \frac{d c_p}{d \alpha}}}. \quad (4.13)$$

а если задана скорость v , то критическое значение жесткости определяется формулой

$$c_{кр} = \frac{\rho v^2}{2} \frac{d c_p}{d \alpha}. \quad (4.14)$$

Для устойчивости пластины необходимо выполнение условия $c < c_{кр}$. При $c = c_{кр}$ невозмущенное горизонтальное положение пластины перестает быть устойчивым; значительные аэродинамические силы становятся достаточно большой для того, чтобы преодолеть сопротивление упругой опоры и удержать пластину в отклоненном положении.

Можно сказать, что эффективная жесткость системы (протяг поворота вокруг оси шарнира) увеличивается при увеличении скорости V потока; при $V=V_{кр}$ эта жесткость обращается в нуль. Здесь легко заметить аналогию со свойствами свободной гибкой стойки: ее жесткость в поперечном направлении убывает с возрастанием снижающей силы P и обращается в нуль при $P=P_{кр}$.

Слоная ситуация может возникнуть при обтекании крыла самолета, имеющего некоторую конечную жесткость кручения. Как и для рассредоточенной вилки пластины, увеличение угла атаки крыла приводит к появлению дополнительного аэродинамического момента, стремящегося закрутить крыло и, следовательно, еще больше увеличить угол атаки. Поэтому с ростом скорости полета благодаря действию аэродинамических сил эффективная жесткость кручения крыла уменьшается. Полная утрата жесткости кручения крыла приводит к катастрофическим последствиям; состояние, при котором эта жесткость обращается в нуль, называется *дивергенцией* крыла, а соответствующая скорость полета — *критической скоростью дивергенции*.

Приведенную выше формулу (4.13), конечно, нельзя непосредственно приложить к более сложной схеме задачи о скручивании крыла, но принцип определения критической скорости для крыла остается тем же. Из теории дивергенции крыла (основанной теорией Ланглена Г. Рейсснера в 1926 г.) следует, что критическая скорость убывает с уменьшением жесткости крыла при кручении, что аналогично результату, полученному и для нашей упрощенной схемы.

Критическая скорость дивергенции практически неизвестна, так как уже при малых скоростях неизбежна поперечная конструкция из-за колебаний, но достаточно больших деформаций^{*)}. Следует, что именно такое предельно-неустойчивое состояние является причиной аварии моноплана Ланглена (1903 г.); из-за этой аварии американские конструкторы в течение десяти лет с опаской относились к монопланной схеме самолетов.

Остаемся теперь на другом варианте аэроупругой статической неустойчивости, которое можно назвать *дивергенцией лопатки*. В отличие от схемы, изображенной на рис. 4.7, где сама пластина считалась жесткой, а податливость была распределена вдоль одной кромки (упругая

сторона), здесь рассматривается упругая пластина, жестко закреплена вдоль одной из длинных кромок и свободная вдоль другой.

Пусть поток направлен параллельно невозмущенной средней поверхности пластины, как это изображено на рис. 4.8, а. Здесь же показано изображение искривленной

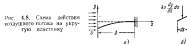


Рис. 4.8. Схема действия надувного потока на упругую пластину

среднюю поверхность, которую можно считать цилиндрической при достаточно большой длине пластины (двухмерной перпендикулярно плоскости чертежа). Как и в предыдущих задачах, возрастает площадь условия, при которых наряду с невозмущенной формой равновесия (неисогнутая пластина) возможна искривленная форма равновесия, когда изгиб пластины обусловлен соответствующим этому изгибу аэродинамическими нагрузками.

Вообще говоря, обтекание кривой искривленной поверхности пластины представляет собой сложную задачу аэродинамики; эта задача еще больше усложняется в рассматриваемом здесь случае, когда форма изгиба пластины не задана, а зависит от распределения аэродинамической нагрузки. Однако при больших сверхзвуковых скоростях потока решение может быть решено упрощено, если воспользоваться вторичной теорией, согласно которой местное давление на искривленную поверхность пропорционально местному углу атаки и скорости потока α :

$$q = -k\alpha \frac{dy}{dz}, \quad (4.15)$$

где k — постоянная, $y=y(z)$ — профиль пластины, а dy/dz — местный угол атаки (рис. 4.8, б).

Запишем дифференциальное уравнение цилиндрического изгиба пластины:

$$D \frac{d^2 y}{dz^2} = q, \quad (4.16)$$

в которой

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (4.17)$$

^{*)} Это явление связано с потерей устойчивости по отношению к колебаниям в направлении, перпендикулярном направлению течения.

— квадрупольная жесткость (E — модуль упругости материала, h — толщина пластины, μ — коэффициент Пуассона). Подставляя в дифференциальное уравнение (4.16) выражение (4.15), получаем основное дифференциальное уравнение задачи в виде

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \sigma^2 \frac{dy}{dz} = 0, \quad (4.18)$$

в котором

$$\sigma = \sqrt{\frac{2k}{D}} \quad (4.19)$$

представляет собой величину, зависящую от параметров пластины и скорости потока v .

Далее ставится обычный для теории Эйлера вопрос: существуют ли такие значения параметра σ , при которых, кроме тривиального решения $y=0$, дифференциальное уравнение (4.18) имеет другие решения, соответствующие искривленной форме равновесия, и при какой скорости потока это становится возможным? При достижении такой скорости неизменная форма перестает быть устойчивой и возникает дивергенция. Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно, как и в обычных задачах продольного изгиба, обрывать общее решение дифференциального уравнения (4.18), подчинить его граничным условиям:

$$\begin{aligned} y'' = 0, \quad y''' = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\ y = 0, \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \end{aligned} \quad (4.20)$$

и, наконец, установить, при каких значениях параметра σ возможны ненулевые решения.

Частное решение дифференциального уравнения (4.18) примет в виде

$$y = Ae^{\lambda z}. \quad (4.21)$$

Подставив его в дифференциальное уравнение (4.18), получим характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda^2 + \sigma^2) = 0. \quad (4.22)$$

Это алгебраическое уравнение четвертой степени имеет четыре корня, которые легко найти, представив его в виде

$$\lambda(\lambda - \sigma)(\lambda^2 - \lambda\sigma + \sigma^2) = 0. \quad (4.23)$$

Приравняв поочередно каждый из множителей нулю, найдем следующие корни:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = -\sigma; \quad \lambda_2 = \frac{\sigma}{2}(1 + \sqrt{3}i); \\ \lambda_3 = \frac{\sigma}{2}(1 - \sqrt{3}i). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Соответственно выражению (4.21) общее решение дифференциального уравнения (4.18) имеет вид

$$y = A_0 + A_1 e^{-\sigma z} + A_2 e^{i(1+\sqrt{3})\frac{\sigma}{2}z} + A_3 e^{i(1-\sqrt{3})\frac{\sigma}{2}z},$$

или, если перейти к тригонометрическим функциям,

$$y = A_0 + A_1 e^{-\sigma z} + \sigma^{\frac{\sigma}{2}} \left(A_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma z + A_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma z \right), \quad (4.25)$$

где

$$A_2 = i(A_4 - A_5), \quad A_3 = A_4 + A_5.$$

Теперь нужно подчинить решение (4.25) граничным условиям (4.20); при этом получим четыре уравнения, однородных относительно постоянных A_0 , A_1 , A_2 и A_3 :

$$\begin{aligned} A_0 - \frac{1}{2} A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} A_2 = 0, \quad A_1 + A_2 = 0, \\ A_0 + A_1 e^{-\sigma h} + A_2 e^{\frac{\sigma}{2} h} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma h + A_3 e^{\frac{\sigma}{2} h} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma h = 0, \\ -A_1 e^{-\sigma h} + \frac{1}{2} \sigma^{\frac{\sigma}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma h - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma h \right) A_2 + \\ + \frac{1}{2} \sigma^{\frac{\sigma}{2}} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma h + \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma h \right) A_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Конечно, эта система удовлетворяется нулевыми значениями постоянных:

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0,$$

что соответствует тривиальному решению $y=0$. Для того чтобы постоянные A_0 , A_1 , A_2 , A_3 не образовались в нуль, необходимо, чтобы равнялся нулю определитель, состав-

лений из коэффициентов системы уравнений (4.26):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{V\sqrt{3}}{g} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & e^{-\alpha b} & \frac{\pi}{2} \cos \frac{V\sqrt{3}}{2} \alpha b & \frac{\pi}{2} \sin \frac{V\sqrt{3}}{2} \alpha b \\ 0 & -e^{-\alpha b} & \frac{\pi}{2} \left(\cos \frac{V\sqrt{3}}{2} \alpha b - V\sqrt{3} \sin \frac{V\sqrt{3}}{2} \alpha b \right) & \frac{\pi}{2} \left(V\sqrt{3} \cos \frac{V\sqrt{3}}{2} \alpha b + \sin \frac{V\sqrt{3}}{2} \alpha b \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Развертывая этот определитель, получаем следующее transcendентное уравнение для параметра αb :

$$\cos \frac{V\sqrt{3}}{2} \alpha b + 0,5e^{-\alpha b} - \frac{1}{2} \alpha b = 0. \quad (4.27)$$

Графическое решение (рис. 4.9) дает единственный корень уравнения (4.27):

$$\alpha b = 1,85. \quad (4.28)$$

Теперь из выражения (4.15) можно найти критическую скорость течения:

$$v_{кр} = 6,33 \frac{D}{\sqrt{EJ}}. \quad (4.29)$$

При этой скорости наименьшая форма равновесия пластины перестает быть устойчивой и возникает состояние дивергенции.

в. Силы, пропорциональные кривизне (сплошная кривая на рисунке трубопровода).

Рассмотрим возможность потери устойчивости вертикального участка изогнутого трубопровода, на котором течет жидкость со скоростью v (рис. 4.10, а).

Разумеется, что изображенное на рисунке состояние, при котором ось трубопровода произвольна, является состоянием равновесия при любой скорости течения жидкости v . Нам известно вычитать, может ли существовать искривленная форма равновесия, когда изгиб трубопровода создается или, может быть, лучше сказать — поддерживается) внешними силами части жидкости; эти силы возникают вследствие кривизны траекторий частиц. Такая возможность естественна, так как при изгибе трубопровода, например, вправо (рис. 4.10, б) центробежные

силы направлены также вправо, и вопрос состоит лишь в том, достаточно ли велик сил для поддержания изгиба. Прямые координатные оси согласно рис. 4.10, б и обозначим: $y = y(z)$ — прогиб оси трубопровода, v — скорость течения жидкости, EJ — жесткость поперечного сечения трубопровода, g — вес жидкости, приходящийся на единицу длины трубопровода, g — земное ускорение.

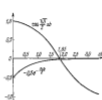


Рис. 4.9. Графическое решение transcendентного уравнения (4.27)

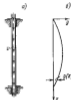


Рис. 4.10. Силы трубопровода: v — скорость течения жидкости

Элемент нагрузки, занимающий участок длины ds , развивает силу инерции $-\frac{\rho}{g} ds \frac{v^2}{R}$; здесь ρ — радиус кривизны траектории, т. е. радиус кривизны искривленной оси трубопровода. При малых прогибах можно принять

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dz^2}. \quad (4.30)$$

Следовательно, интенсивность распределенной инерционной нагрузки составляет $-\frac{\rho v^2}{g} \frac{d^2y}{dz^2}$. Таким образом, поперечная нагрузка на трубопровода является за второй производной функции, описывающей прогиб оси трубопровода; важно заметить, что интенсивность этой нагрузки зависит от скорости течения.

Дифференциальное уравнение изгиба оси трубопровода можно быть записан в виде

$$EJ \frac{d^4y}{dz^4} - \frac{\rho v^2}{g} \frac{d^2y}{dz^2} = 0. \quad (4.31)$$

$$\text{или} \quad \frac{d^2y}{dz^2} + y' \frac{d^2y}{dz^2} = 0, \quad (4.32)$$

где параметр λ имеет значение

$$\lambda = \alpha \sqrt{\frac{q}{gEIT}}. \quad (4.33)$$

Общее решение уравнения (4.32) находим в виде

$$y = A_1 + A_2 z + A_3 \sin \lambda z + A_4 \cos \lambda z. \quad (4.34)$$

Постоянные A_1 , A_2 , A_3 и A_4 должны быть определены таким образом, чтобы были удовлетворены граничные условия: если концы трубопровода шарнирно опорты, то

$$\begin{aligned} y=0, \quad y'=0 & \text{ при } z=0, \\ y=0, \quad y'=0 & \text{ при } z=l. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Пользуясь этими условиями, мы приходим к уравнению $\sin \lambda l = 0$. (4.36)

(Если $\sin \lambda l \neq 0$, то в нуль обращаются все постоянные A_1 , т. е. получаем тривиальное решение, соответствующее неизогнутой форме равновесия.)

Из уравнения (4.36) находим первый ненулевой корень (он представляется единственным возможным, как и в обычной задаче Эйлера о продольном изгибе жесткого стержня):

$$\lambda = \frac{\pi}{l}. \quad (4.37)$$

Подставляя сюда выражение (4.33), получим значение критической скорости:

$$v_{кр} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{gEI}{q}}. \quad (4.38)$$

Таким образом, когда $v = v_{кр}$, наступает потеря устойчивости произвольной формы равновесия и эффективная поперечная жесткость трубопровода как бы исчезает.

В. И. Феодосия отметил логичные обстоятельства: потеря устойчивости происходит при той скорости, при которой результирующая сила струи $qz^2/2$ равна критической силе Эйлера. Не следует, однако, полагать, что труба сжимается этой силой, — труба теряет устойчивость, вообще не испытывая сжатия.

Первые две задачи (см. рис. 4.1 и 4.2) решены в книге А. А. Уманского, А. М. Абрикосова, А. С. Володаря, Ю. П. Гаврилова, А. И. Козлова, В. А. Маркина, Н. В. Протопопова — Сборник задач по сопротивлению материалов (М.: Гостехиздат, 1954).

Задачи неавтоупругости посвящены монографии С. А. Амбарцумяна, Г. Е. Богданорина и М. В. Безубенкина «Неавтоупругость тонкой пластины в оболочке» (М.: Наука, 1977).

Литература, посвященная проблемам неупругости, будет указана в конце гл. VIII.

Приведенное решение задачи об устойчивости трубопровода совпадает с решением, которое дал Брасс^{*)} для задачи о движении поперечного распределенной струйки.

Задачу о статической неустойчивости трубопровода см. в книге В. И. Феодосия «Образование задан и вопросы по сопротивлению материалов» (М.: Наука, 1973, 4-е изд., задача 119).

Глава II ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОЯВЛЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ

Во введении указывалось, что потеря устойчивости некоторых систем может выражаться во внезапных переходных системах из одного равновесного состояния в другое, также равновесное, но не совместное с первым (потеря устойчивости в виде перекоковой).

В этой главе собраны некоторые примеры таких систем. Обсуждение начинается с простейшего изломого случая — задачи о деформировании двухстворчатой системы, называемой фермой Маллеса. Изучение этой системы позволяет выявить все существенные черты систем рассматриваемого вида.

§ 5. Теория катастроф и ферма Маллеса

В литературе, посвященной одному из новых разделов математики, который носит пугающее название «теория катастроф», можно встретить описание недавно изобретенного демонстрационного устройства — машины Зингера. Машина состоит из диска, который может без трения вращиваться вокруг своей оси, и двух пружинок AB и BC , направленных осей которых определяют угловую координату диска (точка B связана с диском — см. рис. 5.1). Концы первой пружинки A жестко закреплены на основании, а концы второй пружинки C заданы весьма медленным движением в плоскости основания. Свойства всей этой системы существенно зависят от положения, в кото-

^{*)} Жан Антуан Шарль Брасс (1822—1883) — французский ученый. Был инженером мэра города, стал применять построенный мост вильгельмизма мостов, довелся в одном издании мосту расчета статически неопределимой системы методом сил. Член Парижской Академии наук.

ром находится точка С. Как правило, малым перемещением точка С сдвигаются также малые изменения угла φ и параллельной осей пружинок. Однако при прогибании точки С некоторая особая поперечная система перекосов резко меняет свою конфигурацию (см. штриховые линии на рисунке). Эти перекосы признали иллюстрировать один из типов катастрофы, о которых идет речь в общей теории.

В специальной механике можно считать преобразование машины Зинана, — формы Милера.

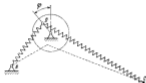


Рис. 5.1. Машина Зинана

В 1923 г. Р. Милер^{*)} исследовал свойства двухствержневого узла, к которому приложена внешняя сила; упрощенный вариант этой системы показан на рис. 5.2, а (Милер не ограничился изучением симметричной схемы).

Рассматривая далее только симметричные формы равновесия, будем считать, что стержни, образующие систему, неограниченно прочные и линейно деформируемые; тогда без дальнейших оговорок можно рассматривать не только малые, но любые вертикальные перемещения узла. Для того чтобы представить себе возможность больших перемещений, достаточно предположить, что каждый из стержней представляет собой пружину (рис. 5.2, б); в этом случае малые деформации и напряжения могут соответствовать достаточно большим укорочениям пружин, а следовательно, и заметным поворотам их осей.

Так как перемещение δ не мало и форма системы существенно меняется в процессе нагружения, то уравнения равновесия следует составлять для деформированного состояния, т. е. учитывать при их составлении, что упругое равновесие соответствует конфигурации, заметно отличающейся от заданной. Уравнение равновесия угла дает

$$N = \frac{P}{2 \cos \alpha}, \quad (5.1)$$

где N — усилия в стержнях, α — угол между направлением оси деформированного стержня и вертикалью. Таким

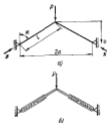


Рис. 5.2. Двухствержневой узел (Формы Милера)

образом, при учете деформаций рассматриваемая система становится, в сущности, статически неопределимой δ , поскольку в выражении (5.1) падает неизвестный угол α , отличающийся от заданного начального значения α_0 .

Составим еще одно (деформационное) соотношение между усилиями N и перемещением δ . Так как укорочение каждого стержня равно

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E E_0} = \frac{\delta}{2l \cos \alpha}, \quad (5.2)$$

то усилия в стержнях составляют $(l_0$ — начальная длина)

$$N = \frac{EF \Delta l}{l_0} = EF \left(1 - \frac{\sigma_0 \cos \alpha_0}{\sigma \cos \alpha} \right), \quad (5.3)$$

^{*)} Ральфа Милер (1882—1968) — в 1909—1913 гг. профессор в Стэнфорде и Беркли; после эмиграции в Германию — профессор Смардского (1923—1926), а затем Гарвардского университетов (1929—1962). Автор ряда исследований по теории катастроф, входящих в классическую теорию упругости. Опубликованы научные журналы *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*.

Если вместо стержневой система содержит пружины, то жесткость EF в формуле (5.3) должна быть заменена эквивалентной жесткостью пружины.

Теперь, проанализировав правые части выражений (5.1) и (5.3), можно найти связь между нагрузкой P и углом α :

$$P = 2EF \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \cos \alpha. \quad (5.4)$$

Далее можно от угла α перейти к линейному перемещению s . После преобразования вместо (5.4) получится

$$P = 2EF \left(1 - \frac{l}{s} \operatorname{tg} \alpha\right) \left[\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \left(1 - \frac{l}{s} \operatorname{tg} \alpha\right)^2}} - \cos \alpha \right]. \quad (5.5)$$

Зависимость (5.5) графически изображена на рис. 5.3 в виде кривой 1—2—3—4—5—6—7—8. Любой из точек этой

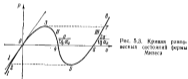


Рис. 5.3. Кривая равновесных состояний фермы Меллея

кривой соответствует некоторое состояние равновесия системы, характеризуемое соответствующей парой значений P и s . Кривая равновесных состояний имеет вид графика, изображенного на введении на рис. 0.2; она имеет два экстремума — максимум в точке 2 и минимум в точке 3. Эти точки разделяют кривую на три характерных участка I, II и III; в пределах каждого из них зависимость между P и s носит монотонный характер. Прямая, проходящая через начало координат по касательной к кривой $P - s$, соответствует решению, получаемому по линейной теории.

Часть участка I, расположенная выше точки 2, соответствует отрицательным, т. е. направленным вверх, силам P , причем при $P \rightarrow -\infty$ угол неограниченно увеличивается.

Представим себе, что процесс нагружения s происходит монотонно от нуля (точка 0). Очевидно, что после

достижения системой состояния, характеризуемого точкой 2, должна произойти перестройка системы сразу на участок III (точка 7). Одной из той же нагрузки $P_2 = -P_7$, т. е. непосредственно перед перескоком и сразу же после него, соответствует различная конфигурация системы; величина P_2 определяет верхнюю критическую силу. При дальнейшем увеличении силы P состояние равновесия системы будет соответствовать еще более высоко расположенным точкам участка III.

Процесс разгрузки системы, начинающийся с какой-либо точки 8, расположенной на третьем участке выше точки 7, осуществляется участком III, и состояние равновесия системы будет последовательно характеризоваться точками 8—7—6—5. Заметим, что при продолжении через точку 7 обратного перескока в точку 2 не происходит.

Точка 6 соответствует нагрузке $P_6 = 0$ и перемещению $s_6 \neq 0$. Таким образом, если сначала нагрузить систему до уровня силы P_2 , а затем полностью разгрузить систему до точки 6, то она не вернется в исходное состояние. Далее, для перехода из состояния 6 в состояние 3 необходима отрицательная (т. е. направленная вверх) нагрузка P . С дальнейшим увеличением силы P (т. е. при увеличении направленной вверх нагрузки) система совершит обратный перескок на первый участок (точка 2), а затем установится монотонный процесс деформирования вниз по участку I (рис. 5.3). Значение P_2 определяет нижнюю критическую силу.

Состояния равновесия, характеризуемые точками участка II на рис. 5.3, во всем описанном процессе не реализуются. Конечно, в принципе можно искусственным образом заставить систему в какой-либо из таких состояний, но эти состояния неустойчивы.

Убедимся в этом, следуя потенциальной энергии возможных отклоненных состояний системы, если она нагружена некоторой фиксированной силой P_M , отмеченной на рис. 5.4. Как видно, при такой нагрузке возможны три состояния равновесия, характеризуемые точками M, N и R. Для анализа устойчивости каждого из этих состояний нужно рассмотреть зависимость полной потенциальной энергии системы от перемещения s , считая силу P неизменной; другими словами, нужно рассмотреть состояния системы, описываемые всеми точками горизонтальной прямой $P = P_M$, т. е. не только состояния равновесия, но и неравновесные состояния.

Полная потенциальная энергия системы в деформированном состоянии состоит из двух частей: потенциальной энергии деформации, которую определим по формуле

$$U_0 = 2 \frac{AV_0}{2EF} - EFL_0 \left[1 - \cos \alpha_0 \sqrt{1 + \frac{v}{s} \operatorname{tg}^2 \alpha_0} \right]^2, \quad (5.6)$$

и потенциала нагрузки

$$U_1 = -Pv. \quad (5.7)$$

Следовательно, полная потенциальная энергия системы равна

$$U = EFL_0 \left[1 - \cos \alpha_0 \sqrt{1 + \frac{v}{s} \operatorname{tg}^2 \alpha_0} \right]^2 - Pv. \quad (5.8)$$

На рис. 5.4, б изображена зависимость $U=U(v)$; можно отметить, что абсциссы экстремумов совпадают с абсциссами

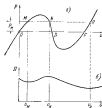


Рис. 5.4 а) Кривые равновесия системы; б) зависимость полной потенциальной энергии от перемещения v при фиксированном значении силы $P=P_M$

точек M , N и R на рис. 5.4, а. При этом в точках с абсциссами v_M и v_R потенциальная энергия минимальна, т. е. равновесие устойчивое; в точке с абсциссой v_N потенциальная энергия имеет максимум, и соответствующее состояние равновесия неустойчиво.

Следует отметить, что на рис. 5.4, а и б одной и той же буквой обозначены, в сущности, неодинаковые величины:

в первом случае под v понимается истинные перемещения, соответствующие координатам силы P , а во втором случае — возможные перемещения системы при фиксированной силе P , в том числе перемещения, отбрасывающие неравновесные состояния системы.

Неустойчивость состояний, описываемых точками ветви IK (рис. 5.3), легко понять, рассматривая, например, одну из характерных точек этой ветви — точку O (рис. 5.4, а), которой соответствует нулевая нагрузка $P=0$ (см. также рис. 5.3). При этом стрелки сматывания, естественно, будут стремиться к одному из разгруженных состояний, показанных штриховыми линиями на рис. 5.5; эти состояния характеризуются точками O и F на рис. 5.4, а.

Рис. 5.5 Состояния равновесия формы Мисеса при $P=0$



Таким образом, последние участки кривой $P=0$ соответствуют устойчивым состояниям равновесия, а последние — неустойчивым состояниям равновесия. Если система — искусственным образом смещена на неустойчивый участок IK , а затем освобождена силой $P=0$, то после любого малого возмущения произойдет перескок и либо из состояния устойчивого равновесия: либо на участок I , либо на участок IK ; направление перескока из точки M в точку N или R зависит от знака случайного возмущения.

Любопытно, что после нагружения и полной разгрузки обнаруживается остаточное изменение формы; поэтому рассматриваемую систему можно было бы назвать ϵ и ρ и т. д. Вспомогательное, при анализе составленной программы изменение нагрузок истинная форма такой «загруженной» системы, конечно, полностью восстановится (например, при постепенном нагружении по циклу $O \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow A \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow O$, рис. 5.3).

При перескоке из неустойчивого состояния равновесия в устойчивое состояние потенциальная энергия системы мгновенно увеличивается, так как последнему соответствует более низкий энергетический уровень. Освобожденная

При перескоке потенциальная энергия переходит в кинетическую, в покое возникнут колебания, которые с течением времени затухнут из-за рассеяния механической энергии.

Заметим, что систему можно привести по всей кривой состояний равновесия, включая участок II, если создать особые искусственные условия деформирования и прануциальным образом постепенно перемещать угол α , исключив возможность перескоков.

Такой процесс минимальными дополнительными напряжениями можно конструктивно осуществить, например, по схеме, показанной на рис. 5.6 (жесткое нагружение). Плавное вращение шестерки 1 достигается посредством опускания зубчатой рейки 2, шарнирно связанной с углом 3. При вращении шестеронки 1, а следовательно, и угла 3, передаваемые рейкой



Рис. 5.6. Схема жесткого нагружения формы Маизеля

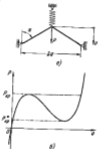


Рис. 5.7. а) Форма Маизеля с distributed нагрузкой; б) обратный процесс при разгрузке: происходит «за» положительными значениями силы P

на угол, будут меняться в точности по кривой 1—2—3—4—5—6—7—8, поскольку равновероятно вращением шестерни обеспечивается постепенный рост перемещения угла, а не нагрузки на него.

Можно рассмотреть несколько более сложную систему — форму Маизеля, снабженную дополнительной упругой опорой (рис. 5.7, а). Схема между нагрузкой P и верти-

кальным смещением w для такой системы имеет вид

$$P = 2EF \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0} \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \times \times \left[\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)^2} - \cos \alpha_0 \right] + w, \quad (5.9)$$

где k — коэффициент жесткости упругой опоры.

Зависимость (5.9) отличается от зависимости (5.5) только слагаемым w в правой части, которое и определяет характер кривой (5.9).

В зависимости от жесткости дополнительной опоры k величина критическая нагрузка $P_{кр}$ может оказаться отрицательной (по типу рис. 5.3) или положительной (по типу рис. 5.7, б).

Если жесткость k мала, то кривая $P-w$ в главных чертах сохраняет прямой вид. Если же значение k достаточно велико, то график зависимости (5.9) имеет вид, как на рис. 5.7, б. Система, характеризующая подобной зависимостью $P-w$, при полной разгрузке (снижение нагрузки до нуля) возвращается в исходное положение, так как перескок при разгрузке происходит при положительном значении силы P .

В заключение нужно отметить существенную ограниченность изложенного исследования свойств формы Маизеля, связанную с принятым предположением о строгой симметрии всех рассмотренных равновесных форм. Однако нигде не следует, что наряду с какой-либо симметричной формой, соответствующей, например, точке M на рис. 5.4, не может существовать с ней в равновесии другая форма равновесия, отвечающая той же нагрузке P_0 . Анализ этой возможности представляет собой исследование устойчивости — в прямом смысле слова — состояний равновесия, симметричных кривой $P-w$. Такой анализ был выполнен В. И. Федосовым; им было установлено, что потеря устойчивости указанного вида происходит, когда в процессе возрастания нагрузки угол достигает значения, определяемого равенством

$$\sin \alpha = \sin^2 \alpha_0 = \sin \alpha_0, \quad (5.10)$$

Если отсюда найти критический угол α , то критическая сила определяется выражением (5.4). Простые вычисления показывают, что уравнение (5.10) имеет действительные корни только при $\alpha_0 < 23^\circ 35'$, т. е. для весьма «высокой» формы Маизеля; при этом потеря устойчивости может произой-

ти. Кроме того, когда в процессе нагружения происходит переход в симметричную равноосную форму. Для относительно высоких форм, когда $\alpha_0 > 22^\circ 36'$, обуславливаемый вид потери устойчивости неизвестен.

Формы Мембри изучены в работе: R. Miles «Stet in Stahlblechprobleme der Elastizitätstheorie» (Zeitschr. angew. Math. Mech., 1932, — 5, 406—407) и R. Miles, J. Hattendorfer «Die Kalkulation der Fachwerke» (Zeitschr. angew. Math. Mech., 1932, — 5, 218—231).

В книге В. И. Федосеева «Формулы задачи в вопросах сопротивления материалов» (4-е изд. — М.: Наука, 1973) рассмотрены вопросы устойчивости в виде перегиба и скачков несжимаемых форм равновесия.

О теории катастроф см. книгу Т. Пастона и И. Стилера «Теория катастроф и ее приложения» (М.: Мир, 1982), а также Дж. М. Т. Томаса «Устойчивость и катастрофы в науке и технике» (М.: Мир, 1982).

§ 6. Примеры систем с перегибами

Стабильность некоторых нелинейных систем к перегибам в ряде случаев оказывается полезной. Так, например, упругий элемент электрического переключателя должен «перескакивать» из одного состояния равновесия (замкнутое) в другое, резко отличающееся от исходного (разомкнутое), и наоборот. Для этого крайние равновесные состояния упругого элемента переключателя должны обладать заданной нелинейностью. В других случаях способность к перегибам представляет собой нежелательную конструкцию, который может быть следствием ошибки, допущенной при проектировании или изготовлении.

Ниже будут рассмотрены некоторые из наиболее часто встречающихся случаев, оставаясь в стороне количественный анализ, мы ограничимся только качественным рассмотрением.



Рис. 6.1 Схема мембраны

Хлопчатая мембрана представляет собой полый тонкостенный дугой (рис. 6.1). Если постепенно увеличивать давление

на поверхность мембраны, то при некотором его значении происходит провисание, и мембрана принимает новую форму равновесия. На рис. 6.2 изображены варианты кривых $P = f(\varphi) = 2hA \cdot \alpha_0$ — поверхности центра мембраны для различных типов мембран, характеризующихся отношением h/A (h — стрела подъема, A — толщина мембраны).

Всегда полые мембраны ($h \leq 1,5A$) вообще не обладают способностью к перегибам (рис. 6.2, а).

При средних значениях стрелы подъема ($1,5A < h < 3,4A$) мембрана после прощелачивания и последующей разгрузки до нуля возвращается в исходное состояние (рис. 6.2, б). На примере хлопчатой мембраны этого типа устроена обжимная машина для смазки швейных машин: энергия, освобождающаяся при прощелачивании лопатки, расходуется на выбрасывание масла. На том же принципе основана конструкция расширитель перекачки.

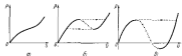


Рис. 6.2 Характеристики мембран: а) мембрана, которая деформируется без возврата; б) хлопчатая мембрана, которая после разгрузки возвращается в исходное состояние; в) хлопчатая мембрана, которая после загрузки и последующей разгрузки имеет остаточный прогиб

При больших значениях стрелы подъема ($h > 3,4A$) мембрана после прощелачивания и последующей полной разгрузки не возвращается в исходное состояние; для того чтобы восстановить исходное состояние, необходимо при разгрузке приложить отрицательное давление (рис. 6.2, в). Подобными свойствами могут обладать так называемые «хлопушки», т. е. жесткие выпучины на стальных листах, остающиеся после сварки обжимных металлоэлектродных наплавов, судов и т. п. Внешний «хлопушка» считается дефектом конструкции, но особенно нежелательны «хлопушки» с отрицательным нажимом критического давления.

Среди рассмотренных выше кривых $P = f(\varphi)$ не было таких, которые имели бы вертикальные участки. Однако системы с такими характеристиками возможны и представляют определенный практический интерес. Таковы, например, ружейные электрические контактные устройства.

В этих устройствах необходимо, чтобы при достижении определенной нагрузки подвижный контакт «перескакивал» с одного неподвижного контакта на другой неподвижный контакт. В зависимости от назначения конструкции возможны два варианта ее осуществления: 1) после снятия на-

грузки подвижный контакт возвращается в прежнее положение; 2) после снятия нагрузки подвижный контакт остается в новом положении.

В первом случае (позвоной переключатель) кривая $P-u$ имеет вид, изображенный на рис. 6.3, а, т. е. наличие критической нагрузки положительная; во втором случае (переводной переключатель) кривая $P-u$ имеет вид, представленный на рис. 6.3, б, т. е. наличие критической нагрузки отрицательная. Жесткость этих



Рис. 6.3. Характеристики переключателей: а) невозвоной; б) переводной

устройства после переключения гораздо больше начальной жесткости, так что на кривых $P-u$ имеются почти вертикальные участки.

Во всех рассмотренных выше случаях (включая тот, в котором говорилось в § 5) переключение происходит только при достижении соответствующего силового барьера. Если нагрузка P меньше, чем верхняя критическая нагрузка, то переключок невозможен, так как при фиксированном значении P величину u изменить невозможно.

Наряду с этим существуют системы иного вида, в которых переключок возможен при любом значении нагрузки P , лежащем в интервале $P_{cr1} < P < P_{cr2}$ (здесь, как и во дальнейшем, мы будем обозначать через P_{cr1} верхнюю критическую нагрузку, а через P_{cr2} — нижнюю критическую нагрузку). Это такие системы, в которых деформационное возмущение может быть вызвано окольным путем, без изменения основной нагрузки P .

Рассмотрим, например, простую систему, изображенную на рис. 6.4, а. Она состоит из жесткого стержня 1 и пружины 2 , которая находится в жесткой трубке и не может выпучиваться. Представленное на рис. 6.4, а состояние равновесия устойчиво при силах P , не превосходя-

щих значения

$$P_{cr} = cl \quad (6.1)$$

(здесь c — коэффициент жесткости пружины при сжатии, l — длина стержня). При $P = P_{cr}$ это состояние равновесия перестает быть устойчивым и система скачком переходит в положение, изображенное на рис. 6.4, б (ось стержня

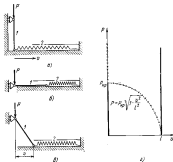


Рис. 6.4. а), б), в) состояние равновесия при одной и той же силе $P=0$; г) кривая равновесия системы

горизонтальной); это состояние равновесия устойчиво при любом значении силы P , большем нуля.

Кроме этих двух состояний равновесия, каждому значению силы $P < P_{cr}$ соответствует еще одно равновесное конфигурация системы (рис. 6.4, в), определяемая смещением нижнего шарнира

$$v = l\sqrt{1 - P/P_{cr}} \quad (6.2)$$

Однако эта конфигурация неустойчива. В целом кривая состояний равновесия представляется в виде, изображенном на рис. 6.4, г. Здесь верхняя критическая

нагрузка определяется формулой (5.1), а значение критическая нагрузка равно нулю. Главной особенностью этой системы состоит в том, что перескоки возможны при любых P , имеющих значения $P_{кр}$.

Пусть, например, нагрузка на вертикальный стержень равна $P_1 < P_{кр}$. Введем некоторое деформационное возмущение в виде горизонтальной силы к данному шарниру, а затем устраним ее. Если приведенное состояние возмущения ν удовлетворяет уравнению

$$\nu_1 < \sqrt{1 - P_1/P_{кр}} \quad (6.3)$$

то стержень вернется в вертикальное положение. В противном случае система скачком перейдет в состояние равновесия, соответствующее рис. 6.4, б.

Сходным образом обладает центральной сжатой пружиной с соединяющимися витками (рис. 6.5, а). Соответствующая ей кривая системной равновесия дана на рис. 6.5, в.

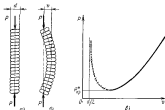


Рис. 6.5. а) б) Пружина с соединяющимися витками; в) кривая равновесия в различных состояниях

Любопытной особенностью этой системы является отсутствие верхней критической силы. Однако это не означает, что система равновесия, характеризующие правой ветвью кривой, неустойчивы. Для перескока в это состояние (рис. 6.5, б) необходимо, чтобы сжимающая сила превосходила значение $P_{кр}$ и, кроме того, чтобы витки были возбуждены достаточное возмущение в виде бокового прогиба (не меньшего чем $\lambda/2$); конечно, последнее условие

требует приложения некоторой дивергентной боковой нагрузки.

Такие образцы, существуют системы, которые допускают окольный путь изменения конфигурации при заданной постоянной нагрузке. Можно сказать, что в таких системах перескоки требуют преодоления не силового барьера (соответствующего верхней критической нагрузке), а деформационного барьера (конечно, при условии, что заданная нагрузка превосходит значение критического значения).

Эти соображения сыграли значительную роль при обсуждении проблемы устойчивости крутой цилиндрической оболочки, равномерно сжатой вдоль образующей (рис. 6.6).

Несколько подробнее остановимся на этой задаче, которая более подробно служила основой для обсуждения лекций.

Первое решение было предложено в 1908 г. Р. Лоренцем. Он использовал метод Эйлера и существенно упростила задачу, предположив, что при потере устойчивости все образующие изгибаются одинаково (асимметричная форма потер устойчивости). Лоренц нашел, что критическое сжимающее напряжение равно

$$\sigma_{кр} = \frac{E\lambda}{\mu \sqrt{1 - \mu^2}} \approx 0,6 \frac{E\lambda}{R} \quad (6.4)$$

Здесь E — модуль упругости материала оболочки, μ — коэффициент Пуассона, λ — толщина оболочки, R — радиус образующей окружности.

Последующие экспериментальные примеры не подтвердили этого теоретического результата. В опытах именно обнаружилось, что критическое напряжение значительно меньше, чем это получается по формуле (6.4); в некоторых экспериментах наблюдалось критическое напряжение даже меньше, чем по формуле Лоренца.

В 1929—1941 гг. Т. Карман ^{*)} и Чарльз Соколовский



Рис. 6.6. Асимметричная форма потер устойчивости цилиндрической оболочки

^{*)} Теодор Карман (1881—1929) родился в Венгрии. В 1909—1929 гг. работал в Германии, в 1929—1933 гг. — в США. Известное много работами в области прикладной теории упругости и в области гидродинамики. Член Академического американского общества.

Добавил эту задачу, но отказался от эйлеровой постановки и задаться было построить кривую $p-u$, исходя из величин совпадающей, учитывающей конечность перемещений. Полученные этии автора результаты представлены на рис. 6.7, а, в виде связи между продольной нагрузкой и смещением торцов оболочки; по оси абсцисс отложены значения относительного продольного укорочения λ , увеличенного в R ; в раз, а по оси ординат — значения безразмерного напряжения $p = \sigma R / E h$. На рис. 6.7, б изображен перестроенный график; здесь по оси абсцисс отложены

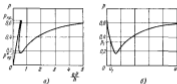


Рис. 6.7. Кривые осевой равновесия: а) по оси абсцисс отложено увеличенное смещение торцов, увеличенное на R ; б) по оси абсцисс отложено безразмерное относительное укорочение

значения безразмерного прогиба $u = \lambda \lambda$; λ (λ_0 — наибольшый прогиб оболочки).

Как видно, для рассматриваемой оболочки существуют два критических значения сжимающего напряжения: первое критическое напряжение p_{cr} , значение которого совпадает с результатом вычислений Лоренца, и второе критическое напряжение p_{cr}^* , приблизительно втрое меньшее, чем p_{cr} .

Заметив близкое совпадение вычисленного значения p_{cr}^* с ранее найденным опытным результатом, Карман и Цинг Ско-сэнь сделали вывод, что в экспериментальных исследованиях потеря устойчивости происходит в виде перегиба при нагружении, близкая к нижней критическому напряжению p_{cr}^* . Пусть, например, оболочка испытывает сжимающее напряжение p , лежащее в интервале $p_{cr}^* < p < p_{cr}$ (рис. 6.7, б). Для перегиба изображающей точки с оси ординат на ascending ветвь кривой $p-u$ необходимо, чтобы возмущение координаты u превысило значение λ_0 .

Карман и Цинг Ско-сэнь исходили из того, что неизбежные несовершенства экспериментальной установки эквивалентны указанному возмущению, следовательно, перегиб становится весьма вероятным уже при достижении нижнего критического напряжения p_{cr}^* . Осталось на тот факт, что энергия системы, соответствующая отклоненной форме равновесия, меньше энергии системы в первоначальном состоянии. Цинг Ско-сэнь выдвинул следующий энергетический принцип: в действительных (нелинейных) условиях наиболее вероятным равновесным состоянием системы является состояние с минимальным энергетическим уровнем. При этом изначально предполагается, что сама природа способствует созданию возмущений, необходимых для соответствующего перегиба системы.

В такой концепции особое значение приобретает и в данном критическое напряжение; оно служит верхней границей безусловно устойчивых состояний, и если фактическое напряжение больше, чем p_{cr}^* , то исходное состояние равновесия уже нельзя считать безусловно устойчивым.

Подобные рассуждения получили довольно широкое распространение и в вопросе устойчивости оболочки с цилиндрической формой срединной поверхности (например, сферических). Тем не менее по адресу энергетического принципа высказывались и довольно резкие критические замечания, вроде следующего: Этот принцип не имеет логической основы и по своей природе является чисто эмпирическим принципом (Я. Ц. Фан и Е. Е. Саклер, 1960 г.).

Прислушавшись к этому замечанию и задумавшись, о каких возмущениях идет речь в принципе Цинг Ско-сэнь и какие возмущения действительно были неизбежны в экспериментальных исследованиях, о которых шла речь выше; как мы сейчас увидим, эти возмущения в принципе различны.

В энергетическом принципе предполагается перегиб при сжимающих напряжениях, меньших чем p_{cr} ; но для этого необходимо преобразование деформационной барьера, т. е. возмущения точкой цилиндрической формы оболочки путем приложения дополнительного поперечного давления или импульса, причем давление должно быть приложено своевременно, когда основное сжимающее напряжение достигло значения p_{cr} .

В экспериментальных исследованиях подобная дополнительная нагрузка не была. Иные дело, что были неизбежны отклонения от точной цилиндрической формы оболочки

вследствие притока теплового характера; это явление тоже можно назвать возмущением, но оно вовсе не эквивалентно возмущениям, о которых идет речь в энергетическом принципе. Из-за начальных несовершенств формы оболочка с самого начала нагружения деформируется по-иному, чем оболочка строго цилиндрической формы; для оболочки с начальными несовершенствами кривая равновесных состояний выглядит примерно так,



Рис. 6.3. Кривая равновесных состояний оболочки с начальными несовершенствами формы

как это представлено на рис. 6.3. Если дополнительные поперечные возмущения исключены, то рассматриваемая оболочка потеряет устойчивость не ранее, чем будет достигнуто первое критическое напряжение $P_{кр}$ для этой нецилиндрической оболочки; естественно думать, что в экспериментах наблюдаются именно это значение $P_{кр}$, которое, вследствие неидеальности формы оболочки, может быть намного выше, чем $P_{кр}$ для идеальной цилиндрической оболочки. Другими словами, перескоки в обусловленных экспериментальными исследованиями требуют продолжения системы балмера.

Эти соображения относительно формулировки лишь совсем недавно; они подталкивают доверие к энергетическому принципу, в котором однозначно отождествлены два различных понятия: возмущения, накладываемые на оболочку в виде дополнительных поперечных движений (или импульсов), и начальные нарушения точной цилиндрической формы оболочки.

В настоящее время исследователи все больше склоняются к мнению, что в экспериментальных исследованиях потеря устойчивости связана не с перескоком при нулевом критическом напряжении идеальной оболочки, а с достижением первого критического напряжения реальной (неидеальной) оболочки. Подтверждением этого могут служить экспериментальные исследования Теннисона (1963 — 1964 гг.), в которых потеря устойчивости весьма типично возникала в цилиндрических оболочках, наблюдались при напряжениях, близких к значению (6.4). Как отмечает Теннисон, перескок мог быть замечен и при меньших напряже-

ниях, но тогда необходимо специально прикладывать значительные боковые возмущения.

По-видимому, при использовании результатов экспериментальных исследований устойчивости нужно ориентироваться на первое критическое напряжение, но численно, конечно, не для гипотетической оболочки строго цилиндрической формы, а для реальной оболочки из реального материала.

Из сказанного не следует делать вывод, что понятие первого критического напряжения вообще лишено практического значения. Дело в том, что боковые возмущения, обычно отсутствующие в лабораторных условиях, могут оказаться вполне периодичны и даже неизбежны при запуске реальной конструкции; ясно, что в этих условиях возникает опасность перескоков при напряжениях, меньших чем $P_{кр}$, и, возможно, намного превосходящих $P_{кр}$. Однако это не означает реалитизации концепции Цзяо Сяо-сяня по двум причинам. Во-первых, значение $P_{кр}$, как и значение $P_{кр}$, должно определяться для реальной, а не для идеальной оболочки; во-вторых, перескок при $P_{кр}$ нельзя считать фатально неизбежным: для такого перескока необходимо преодолеть определенный уровень боковых возмущений, а нужны весьма основания для того, чтобы считать этот уровень реально достижимым.

В заключение нужно отметить, что первое критическое напряжение для гладких оболочек существенно зависит от масштаба начальных неидеальностей. С практической точки зрения чувствительность гладких оболочек к малым труднопрогнозируемым влияниям — существенный недостаток; для его устранения оболочки обычно шаркают — например, ребрами жесткости. Подшерошенные конструкции существенно менее чувствительны к начальным неидеальностям, а в первом критическом напряжении оказываются близкими к критическому напряжению, вычисленному по линеаризованным уравнениям соответствующей задачи Эйлера.

Подробные исследования критической нагрузки даны в работе В. И. Фидельмана (см. его книгу «Углубленные методы теории упругости», М.: Оборонгиз, 1949). Перескоки и нарушения устойчивости исследованы в работе П. П. Лелюка «Изучение боковых перескоков в других системах с расчетом прочности цилиндрических устройств» (Изв. СВ, 1948, т. 5, вып. 1). В статье Э. И. Протолова «Об устойчивости вращающихся полых труб», сб., 1960, т. 7) рассматриваются перескоки вследствие изменения температуры в системах, содержащих биэластичные упругие элементы.

О свойствах кривой $P - \epsilon$ см. статью В. В. Колосова «Об устойчивости тонких упругих стержней в условиях нелинейности» (Сб. Доклады на про-

ность в волноводостроении, 1958, вып. 2 и § 94 книги А. С. Вольпера «Гибкие пластины и оболочки» (М.: Гостехиздат, 1959).

Система, состоящая из деформированной на рис. 6.4. Вала жесткой лентой р. Граммелла для его задачи «Stabilitätsprobleme in der Luft» (ZfG Luftfahrt-Technik, 1940, т. 17, № 1—2). Векторно-аналитическое решение по работе Дорншайм (М. в книге § 10. Работы Теннисона опубликованы в журнале «Progress in Science and Applications» (A.I.A.A. Journal) 1963, № 2, с. 234—243; 1964, № 7, с. 326—341). Работы Кармана и Чжоу Сун-чэна см. в журнале «Journal of the mathematical sciences» 1938, с. 7, № 2; 1941, т. 8, № 9).

Вопросы потерь устойчивости оболочки см. в книге А. С. Вольпера «Устойчивость деформируемых систем» (М.: Мир, 1967). См. также книгу «Устойчивость оболочек» (Библиотека «Образование», М.: ИЛ, 1952; книга Филда и Селлера «Устойчивость тонких упругих оболочек»).

Связь деформации в неэластичных материалах, зависящая от потерь устойчивости цилиндрических оболочек, см. в работе Madani W. A., Hill N. J. The yield-theory and postbuckling behavior of circular cylindrical shells under axial load. — Department of aeronautics and astronautics, Stanford University (SUAER), 1962, № 327.

§ 7. Устойчивость желобчатой полоски

В некоторых технических устройствах применяется спираль, поперечные сечения которой существенно изменяются при изменении возникающих нагрузок. Такова, например, желобчатая металлическая лента рулетки. В развернутом состоянии лента представляет собой неглубокий желоб с прямой продольной осью. Если кривизна контурной линии поперечного сечения ленты обладает заметной изгибной жесткостью, тем большей, чем больше центральный угол φ (рис. 7.1). При возрастании возникающего момента поперечное сечение постепенно расширяется и желобчатая жесткость быстро увеличивается; благодаря этому можно легко удлинить ленту и корпус рулетки в виде компактной спирали, при этом сечения ленты почти полностью распрямлены.

Желобчатая полоска, когда она находится в сжатом состоянии, обладает некоторым запасом потенциальной энергии, который образуется не только вследствие изгиба оси полоски по спирали, но в основном из-за расширения поперечных сечений. Именно поэтому желобчатые полоски,

такие, как показаны на рис. 7.1, используются также в некоторых конструкциях пружинных датчиков и в качестве аккумуляторов энергии большой емкости.

Подробнее исследуем свойства желобчатой полоски при частом изгибе. Примем, что в развернутом состоянии образующие полосы параллельны оси z , а срединная линия любого поперечного сечения представляет собой дугу окружности радиуса r . Через x и y обозначим главные центральные оси сечения.

При действии момента M образующие будут искривляться, оставаясь в плоскости, параллельных плоскости yz . В верхней части сечения (выше оси x , см. рис. 7.1) образующие будут укорачиваться, а в нижней части сечения — удлиняться. Примем, что сечение полосы, перпендикулярное оси z в плоскости до нагружения, остается плоским и после нагружения. При этом удлинение любой образующей определяется выражением

$$\Delta l = -\frac{\lambda}{r}, \quad (7.1)$$

где r — радиус кривизны образующей, y — координата точки передаточной образующей с плоскостью сечения (рис. 7.1). В рассматриваемой задаче важную роль играет изменение формы поперечного сечения полосы; поэтому под y следует понимать координату, относящуюся к деформированному состоянию сечения.

Соответственно выражению (7.1) можно по закону Гука найти, что продольное усилие T_x (т. е. усилие, рассчитанное на единицу длины дуги поперечного сечения) равно

$$T_x = -\frac{E\lambda y}{r}, \quad (7.2)$$

где E — модуль упругости материала полосы, λ — ее толщина.

Найденное таким образом усилие T_x соответствует балочной схеме изгиба полосы; вряду с ним возникают моменты M_x , M_y и поперечная сила Q_x , соответствующие изгибу полосы по схеме пластины (или толстой оболочки). На рис. 7.2 изображены бесконечно малый элемент полосы $dx dy dz$ и действующие на него усилия. Так как полоса немыслимо тонкая лента, ее поперечные сечения свободны от сдвигающих сил (параллельных срединной поверхности) и распределенных крутящих моментов; вследствие парности кинематических напряжений этих усилий нет в продольных сечениях полосы.

Из условий равновесия элемента вытекают следующие два соотношения между усилиями:

$$T_x = \rho \frac{dM_x}{dx}, \quad (7.3)$$

$$Q_x = -\frac{dM_x}{dx}. \quad (7.4)$$

Соотношение (7.3) получается из уравнения проекций на нормаль к срединной поверхности, взятого с учетом искривления и соответствующей образующей;

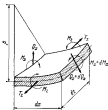


Рис. 7.2. Сила нагрузки элемента плоски

выражение (7.4) совпадает с аналогичным соотношением для балок. Из (7.3) и (7.4) следует, что продольное усилие T_x и изгибающий момент M_x связаны между собой зависимостью

$$T_x = \rho \frac{d^2 M_x}{dx^2}. \quad (7.5)$$

Как известно, изгибающие моменты M_x , M_y связаны с приращением соответствующих кривых κ_x и κ_y в плоскостях xz и xy следующими соотношениями:

$$M_x = D(\kappa_x + \mu \kappa_y), \quad M_y = D(\kappa_y + \mu \kappa_x), \quad (7.6)$$

где μ — коэффициент Пуассона, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — аннгарическая жесткость.

Кривизну в плоскости xz можно принять равной $d^2 u/dx^2$, так как начальная кривизна в этой плоскости равна $1/R$,

то приращение кривизны составляет

$$\kappa_x = \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{R}. \quad (7.7)$$

Кривизна в плоскости xy равна

$$\kappa_y = \frac{1}{R}. \quad (7.8)$$

Поэтому из (7.6) получим следующие выражения для изгибающих моментов:

$$M_x = D \left(\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{R} + \frac{\mu}{R} \right), \quad (7.9)$$

$$M_y = D \left(\frac{1}{R} + \mu \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\mu}{R} \right). \quad (7.10)$$

Вернемся теперь к соотношению (7.5) и подставим в его левую часть выражение (7.9), а в правую часть — выражение (7.9); это приводит к уравнению

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h^3} u = 0. \quad (7.11)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u = C_1 \operatorname{ch} \frac{\alpha x}{\rho} \cos \frac{\alpha x}{\rho} + C_2 \operatorname{sh} \frac{\alpha x}{\rho} \sin \frac{\alpha x}{\rho} + C_3 \operatorname{ch} \frac{\alpha x}{\rho} \sin \frac{\alpha x}{\rho} + C_4 \operatorname{sh} \frac{\alpha x}{\rho} \cos \frac{\alpha x}{\rho}, \quad (7.12)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2) \rho^2}{h^3}}. \quad (7.13)$$

Для определения постоянных C_1 , C_2 , C_3 и C_4 служат теперь граничные условия, выражающие отсутствие нагрузки на продольных кривых плоскостях:

$$Q_x = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{\phi}{2} \quad (7.14)$$

(ϕ — ширина плоскости). При учете выражений (7.4) и (7.5) из этих условий находим

$$C_{1,2} = -\frac{\rho^2}{2\alpha^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{\mu}{R} \right) \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha \phi}{2} \cos \frac{\alpha \phi}{2} \mp \operatorname{ch} \frac{\alpha \phi}{2} \sin \frac{\alpha \phi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\alpha \phi}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha \phi}{2} + \operatorname{sh} \frac{\alpha \phi}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha \phi}{2}}, \quad (7.15)$$

$$C_{3,4} = 0.$$

Таким образом, найдена кривая $u(x)$, описывающая форму искривленного поперечного сечения шпала и зависящая

от радиуса кривизны ρ в плоскости yz . Теперь можно считать внешний момент M с кривизной $1/\rho$, если представить его в виде (рис. 7.3)

$$M = \int_{-b/2}^{b/2} (M_x - T_x y) dy. \quad (7.15)$$

С помощью выражений (7.5), (7.9), (7.10), (7.12) и (7.15) находим

$$M = \frac{bD}{\rho} \left[\left(\frac{t}{\rho} - \kappa \right) + \mu \left(1 - \frac{\mu}{\rho} \right) F_1 + \left(1 - \mu \frac{t}{\rho} \right) \frac{t}{\rho} F_2 \right], \quad (7.17)$$

где

$$F_1 = \frac{3}{4} \frac{\sin \lambda - \lambda \cos \lambda}{\lambda^3}, \quad (7.18)$$

$$F_2 = \frac{1}{28} \frac{t \sin \lambda - \cos \lambda}{\lambda^3} + \frac{\sin \lambda \tan \lambda}{(28 \lambda^3 + 3 \sin \lambda)^2}.$$

причем

$$\lambda = \frac{bt}{\rho} = \frac{t}{\rho} \sqrt{3(1-\mu^2)} \frac{b}{\sqrt{\rho h}}. \quad (7.19)$$

Соотношение (7.17) устанавливает взаимосвязь между нагрузкой M и соответствующей кривизной $1/\rho$.



Рис. 7.3. Сумма моментов изгиба T_x и M_x , относительно оси x радиуса M

Анализ этой связи в общем виде затруднителен; для примера остановимся на частном случае, когда параметры пружины имеют значения: $b=20$ мм, $t=20$ мм, $h=0,2$ мм, $\mu=0,25$, $E=2,1 \cdot 10^4$ кгс/см². Задавать ряд значений t/ρ , находим значения λ , а затем значения F_1 и F_2 ; после этого по выражению (7.17) определяем соответствующие значения момента M . Результаты этой вычислительной работы в таблице и графически представлены на рис. 7.4; она относится как к случаю нагружения, представленному на рис. 7.3 ($1/\rho > 0$), так и к случаю нагружения отрицательным моментом ($1/\rho < 0$).

Таблица значений $M = M \left(\frac{t}{\rho} \right)$

$\frac{t}{\rho}$	M , кгс-мм	$\frac{t}{\rho}$	M , кгс-мм	$\frac{t}{\rho}$	M , кгс-мм
-1,00	-18,8	-0,05	-30,9	0,05	41,5
-0,50	-12,4	-0,04	-31,0	0,07	36,0
-0,30	-11,3	-0,03	-31,7	0,08	30,8
-0,20	-11,0	-0,02	-32,4	0,10	25,8
-0,10	-10,5	-0,01	-32,2	0,15	21,8
-0,05	-10,0	0,01	-32,4	0,20	17,1
-0,03	-10,2	0,02	-32,4	0,30	10,6
-0,02	-10,7	0,03	-32,5	0,40	6,8
-0,01	-11,4	0,04	-32,0	0,50	5,7
-0,00	-16,5	0,05	-31,5	1,00	11,9

Как и в случае формы Мизеса, поворотные желобчатой полоски зависят от способа ее деформирования. Если постепенно увеличивать абсолютное значение изгибающего момента (положительного или отрицательного), то при

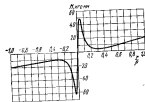


Рис. 7.4. Характеристика пружины

критическом значении ($M=40$ кгс-см и $M=-63$ кгс-см) должна произойти перестройка в новое положение равновесия, весьма далекое от исходного. На за пределами увеличения момента соответственные значения перестройки будут сопровождаться увеличением изгибаний в десятки раз, а может

бать, и более. Однако на практике нагружение полосо обычно создается путем постепенной намотки полосы на оправку, что приводит к постепенному увеличению критичности (жесткое нагружение, как на рис. 5.6 для фермы Милоса). В этом процессе наивысшие перескоки, конечно, произойти не могут, так как будут последовательно сброшены все точки на поднимающихся и опускающихся участках край (рис. 7.4).

В закрученных областях, т. е. при достаточно больших значениях критичности, можно приближенно считать, что поперечное сечение полностью распрямилось. Половина в выражении (7.10) $y''=0$, найдем полный изгибающий момент в виде

$$M = \frac{M_0}{r} \left(\frac{r}{r} - \mu \right), \quad (7.20)$$

т. е. характеристика полосы становится практически линейной, но ее жесткость во много раз меньше начальной.

Устойчивость оболочек полосо впервые исследовал В. П. Петровский и Я. К. Свешев-Ушачев в работе «Об устойчивости цилиндрической оболочки при изгибе» (Труды ЦАГИ, 1931, № 18), см. также книгу Серенца С. В. Основы тонкостенной теории упругости — Киев: Гостехиздат Украины, 1954. В своем изложении мы следовали более поздней работе В. Веста (Vesth, австр. Math. Nachr., 1954, № 12). Приближенную формулу (7.20) можно найти в книге Д. Е. Андреев «Группы элементов оболочки» (М.: Машин, 1952).

Глава III

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ИСЧЕЗНОВЕНИИ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ

В этой главе будут рассмотрены нелинейные системы, в процессе деформирования которых достигается максимум нагрузки, как это изображено на рис. 0.3.

Поведение любой из таких систем зависит от того, каким способом система приводится через состояние равновесия, описываемые точками графика P — u . Напомним, что возможны два способа нагружения:

1) монотонное увеличение нагрузки (жесткое нагружение);

2) монотонное увеличение перемещений (прессовое, или жесткое нагружение).

В случае 1) независимой переменной процесса нагружения служит параметр P , а в случае 2) — параметр u .

Как отмечалось во введении, в первом случае речь идет скорее о потерях равновесия, а не о потере устойчивости при $P > P_{кр}$. Во втором случае параметр P изменится как функция параметра u и о потере устойчивости можно говорить только (по крайней мере, в обычном смысле слова). Поэтому название главы невольно отягчет ее содержание, однако авторам не удалось найти лучшего заглавия.

§ 8. Общая устойчивость высотных сооружений

При проектировании высотных сооружений, таких, как, например, фабричные и заводские трубы, водонапорные башни, радиомачты, телевизионные башни, опоры высоковольтных линий передач, подпорные стенки и т. д., большое внимание приходится уделять вопросу общей устойчивости сооружений. Очень часто устойчивость сооружений оценивают отношением абсолютных значений удерживающего момента $M_{уд}$ и опрокидывающего момента $M_{опр}$:

$$k_{уд} = \frac{M_{уд}}{M_{опр}}, \quad (8.1)$$

которое называют коэффициентом устойчивости (критерий определяемый). Оба момента вычисляются относительно ребра возможного опрокидывания O (рис. 8.1), причем при определении $M_{уд}$ учитывают силы P_1, P_2, \dots (давление ветра, грунта, воды, инерционные силы при землетрясениях и т. д.), а при определении $M_{уд}$ — силы Q_1, Q_2, \dots (силы веса). Существуют нормативные требования, определяющие в зависимости от типа конструкции минимальное значение коэффициента устойчивости $k_{уд}$ (например, для металлических радиомачт должно быть $k_{уд} \geq 2,5$). Конечно, бы, такая методика расчета в своем деле должна обеспечить общую устойчивость конструкции, так как сопоставляемые удерживающие и опрокидывающие моменты как будто полностью отвечают существу дела.

В действительности проблема сложнее, чем кажется на первый взгляд, и относительно высокие нормативные значения минимального коэффициента устойчивости, в сущности, призваны компенсировать неопределенность расчетной методики. Дело не только в том, что расчетные нагрузки определяются недостаточно точно. Главным недостатком расчета по формуле (8.1) состоит в полном пренебрежении взаимодействием системы, в особенности отклоняя, распределенного над фундаментом сооружения.

Пусть, например, речь идет об общей устойчивости жесткой колонны, которая через фундамент опирается на грунт и подвержена действию только собственного веса (рис. 8.2). Поскольку горизонтальные силы отсутствуют, опрокидывающий момент равен нулю, и по формуле (8.1) получается, что коэффициент устойчивости равен бесконечности, сколь бы высокой ни была колонна; конечно, с такой оценкой устойчивости согласиться невозможно.

В 1935—1936 гг. Г. Крамер и Н. П. Павлов существенно улучшили расчетную схему задачи и исследовали



Рис. 8.1. Схема колонны с действующим на подпорную стенку



Рис. 8.2. Жесткая колонна на жестком основании

взаимную устойчивость жесткой колонны на упругом основании (рис. 8.3, а). В этих расчетах принято, что физическое состояние основания описывается моделью Визкелера *) (который получал широкое распространение в расчетах балок, лежащих на упругом основании), т. е. что реакции основания в данной точке пропорциональны осадке колонны в этой же точке:

$$r = -cr, \quad (8.2)$$

здесь c — коэффициент пропорциональности (коэффициент системы). В неизменяемом состоянии равновесии эпюра реакций основания имеет вид аримутальной (рис. 8.3, б), а в отклоненном (возмущенном) состоянии равновесии —

*) Э. Визкелер (1885—1958) — профессор восточной культуры в Москве и Дрездене, Праге, Вена и Берлине. Автор знаменитой теории правого бруса, ряда работ по расчету балок на упругом основании, вращающихся балок и др.

вид трапеции (рис. 8.3, в). В первом случае

$$r = r_0 = \frac{Q}{l} \quad (8.3)$$

(Q — площадь основания), а во втором случае

$$r = r_0 + cr. \quad (8.4)$$

Здесь φ — угол отклонения стойки, x — расстояние от произвольной точки до оси, проходящей перпендикулярно

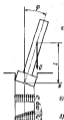


Рис. 8.3. а) Схема и составление уравнений равновесия; б) эпюра реакций основания в неизменяемом положении; в) эпюра реакций основания в отклоненном положении

плоскости чертежа через центр тяжести подошвы фундамента. В отклоненном состоянии равновесия должно выполняться уравнение моментов относительно указанной оси:

$$-Qbr + \int_0^l rdb dx = 0$$

($b=b(x)$ — размер подошвы в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа). Здесь первый член выражает момент силы веса Q , а второй член — момент распределенной сил реакции основания. После подстановки (8.4) и интегрирования получим

$$-Qbr + crJ = 0, \quad (8.5)$$

где J — момент инерции площади основания относительно указанной оси. Конечно, равенство (8.5) удовлетворяется при любых значениях Q , если $\varphi=0$; это тривиальное решение означает возможность равновесия колонны в неизло-

ненном положении. Но то же равенство выполняется и при $\varphi \neq 0$, если сила удовлетворяет условию

$$Q = Q_{кр} = \frac{c'}{7}. \quad (8.6)$$

Полученное значение силы Q является критерием нагрузки для рассматриваемой колонны.

Исходя из этого выражения, Н. П. Пауток и Г. Крамер предложили принять за коэффициент устойчивости отношение

$$k = \frac{Q_{кр}}{Q} = \frac{c'}{Q}. \quad (8.7)$$

Практическая ценность такого подхода безспорна: устойчивость жесткой колонны получает вполне определенную количественную оценку даже в случае, когда горизонтальные силы отсутствуют.

Но если отказаться от критерия (8.1), то как оценить устойчивость колонны в том случае, когда имеются горизонтальные нагрузки? Для ответа на этот вопрос необходимо рассмотреть всю совокупность возможных состояний равновесия при постепенном увеличении горизонтальной силы; конечно, исследование должно строиться с учетом



Рис. 8.4. а) Сила и составление уравнений равновесия; б) второй вариант решения при частичном отрыве колоны фундамента

вертикальности основания. На рис. 8.4, а изображена та же колонна, но под действием дополнительной горизонтальной силы P . Для определения угла отклонения колонны следует воспользоваться уравнением моментов, которое, в отличие от (8.5), имеет вид

$$-Ph - Qh\varphi + c\varphi' = 0, \quad (8.8)$$

так как h — ордината точки приложения силы P . Для упрощения выкладки мы не учитываем различия между углом φ и его функциями $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ (в данном случае речь идет о малых, но конечных углах φ и такое различие все же существует).

Из уравнения (8.8) выводится линейную зависимость

$$p = \frac{c' - Q\varphi}{h}. \quad (8.9)$$

Эта зависимость справедлива лишь до тех пор, пока вторая реакция основания имеет вид трения, как это показано на рис. 8.3, а. Однако с ростом угла φ в конце концов наступит такое состояние, когда реакция у левого края основания обратится в нуль, а затем — с дальнейшим увеличением угла φ — вторая реакция основания приобретает вид, изображенный на рис. 8.4, б (левая часть колоны фундамента отрывается от основания).

Отпуская элементарные выкладки, приведем окончательные выражения для случая, когда колоны фундамента — прямоугольник со сторонами a и b , так что $J = ba^3/12$. Угол φ , при котором происходит переход от трapeзoidalной опоры в треугольную, определяется формулой

$$\varphi_1 = \frac{2a}{3b}. \quad (8.10)$$

причем соответствующие значения силы равно

$$P_1 = \frac{Qa}{3h} \left(1 - \frac{Q\varphi}{c'} \right). \quad (8.11)$$

При дальнейшем росте угла φ момент реакции основания определяется выражением

$$M_1 = Q \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{3} \right), \quad (8.12)$$

где ξ — ширина зоны контакта основания с колонной:

$$\xi = \sqrt{\frac{2Q}{qhc}}. \quad (8.13)$$

Таким образом, вместо уравнения (8.8) получим

$$-Ph - Qh\varphi + Q \left(\frac{a}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2Q}{qhc}} \right) = 0. \quad (8.14)$$

Это уравнение нелинейно связывает горизонтальную силу P с углом φ :

$$P = \frac{Q}{h} \left(\frac{a}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2Q}{qhc}} - h\varphi \right). \quad (8.15)$$

На рис. 8.5 графически представлены линейная зависимость (8.9) и нелинейная зависимость (8.15), образующие кривую состояний равновесия рассматриваемой колонны.

Прежде всего отметим, что нелинейный характер второй части кривой есть непосредственное следствие физических условий взаимодействия фундамента с основанием — при отрыве колонны фундамента от основания момент распределения сил реакции перестает быть пропорциональным углу наклона колонны (конструктивная надлинейность).

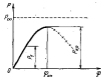


Рис. 8.5. Кривая зависимости от угла

Кривая $P-\varphi$ имеет максимум, определяющий наибольшее значение силы $P=P_{кр}$, при котором еще возможно равновесие колонны; при $P>P_{кр}$ не существует равновесных состояний. Падающий участок (отмеченный крестиками) выражает совокупность неустойчивых состояний равновесия.

На том же рис. 8.5 горизонтальной штриховой прямой показан уровень, характеризующий сжимающую силу P_0 , вычисленную в предположении абсолютной жесткости основания, т. е.

$$P_0 = \frac{Q\alpha}{2l}. \quad (8.16)$$

Это значение следует из формулы (8.1), если положить в ней $k=1$. Можно убедиться в том, что максимум кривой на рис. 8.5 всегда расположен ниже прямой (8.16). Действительно, максимум выражения (8.13) достигается при следующем значении угла отклонения колонны:

$$\varphi_{кр} = \sqrt{\frac{Q}{18kP}}. \quad (8.17)$$

которому соответствует критическая нагрузка

$$P_{кр} = \frac{Q\alpha}{2l} \left[1 - \sqrt{\frac{Q\alpha}{12}} \right]. \quad (8.18)$$

всегда меньше, чем сила, данная выражением (8.16).

Пусть дана некоторая сила $P < P_{кр}$. Коэффициентом устойчивости системы естественно считать отношение $P_{кр}/P$. Показавшему, во сколько раз увеличилась сила больше фактически действующей силы. Но если воспользоваться выражениями (8.1) и (8.16), то для коэффициента устойчивости получится большее значение $P_{кр}/P$. Отсюда следует, что формула (8.1) преувеличивает действительный запас устойчивости.

Это преувеличение может оказаться очень значительным; оно зависит от характерного отношения $l/\sqrt{Q\alpha}$. Так, например, даже для колонны, характеризующейся весьма высоким значением отношения $l/\sqrt{Q\alpha}=8$, применение формулы (8.1) повлекло бы за собой двукратную ошибку.

Стремись к наиболее отчетливому выделению роли податливости основания, здесь мы сознательно не считались, по крайней мере, со следующими важными обстоятельствами:

1. При анализе уравнения равновесия мы заменили тригонометрические функции $\sin \varphi$ и $\lg \varphi$ значениями самого угла φ . При решении задач Эйлера, т. е. при выводе формулы (8.6), такая замена не только допустима, но и естественна, поскольку по смыслу вывода рассматриваются сколь угодно малые углы φ . Однако при построении кривой равновесия (эволюции, описывающей в случае действия горизонтальной силы P , указанной замкнутой кривой говоря, может за собой некоторые количественные отклонения.

2. Собственная жесткость колонны считалась бесконечно большой; при учете деформативности самой колонны вся кривая равновесия состояний расположится ниже кривой, изображенной на рис. 8.5.

3. При больших осевых основаниях зависимость Винклера плохо описывает реальные свойства основания. Упругоупругие свойства основания также будут способствовать уменьшению ординат части кривой равновесия состояний.

4. Сила P может менять свое направление, следуя повороту колонны (особенно это ясно, например, в случае длинных валов); этот интересный вопрос был исследован Я. Б. Лыжиным в 1950 г.

Хотя в практических расчетах названные обстоятельства необходимо учитывать, но это будет уточнением количественного, а не качественного характера.

Работа Н. П. Павлова опубликована в сборнике «Труды Ленинградского института инженеров коммунального строительства» (ЛТИ ИИИ, 1952, вып. 10).

Статья Г. Крамера см. в журнале «Известия» (1956, № 4, с. 53)
 Статья Я. В. Давыда «Об устойчивости жестких стержней в состоянии изгибного колебания при действии произвольного изгибающего момента в том числе сосредоточивающегося, сдвиг отбрасывается в сборнике «Труды Воронежского инженерно-строительного института» (1956, вып. 2).

§ 9. Об особенностях «деформационных расчетов»

В работе «Об устойчивости упругих систем» Г. Цинлер, характеризуя различные методы исследования устойчивости, в частности, пишет: «... некоторые задачи устойчивости могут быть решены «методом неидеальностей», ... этот метод характеризуется следующим вопросом: какова величина силы, при которой прогибы идеальной системы становятся неограниченно большими? Здесь под неидеальностью понимаются различные отклонения от идеальных условий, характерных для эйлеровой постановки

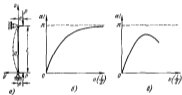


Рис. 9.1. а) Схема нагруженного изгибаемого стержня; б) кривая равновесия стержней, соответствующая уравнению (9.1); в) кривая равновесия стержней, построенная с учетом неидеальности системы

задач устойчивости. Так, в неидеальности сжатого стержня относятся начальные эксцентриситеты сжимающей силы, начальная погрешь оси, асимметрия физических свойств (вообще говоря, например, вследствие остаточных напряжений от сварки, прокатки или травки) и т. п.

Существенная особенность решения по методу неидеальностей состоит в том, что отклонения от исходной конфигурации системы (например, когда ось сжатого стержня) возникают с самого начала нагружения и — в отличие от метода Эйлера — наличие таких отклонений не может служить признаком потери устойчивости.

Некоторые авторы явно предпочитают метод неидеальностей и учитывают в анализе те или иные начальные несовершенства даже в тех случаях, которые в принципе допускают эйлерову постановку проблемы. Так, в книге «Устойчивость упругих систем» С. П. Тимошенко систематически избегает эйлеровой постановки и, например, критическую силу для гибкого стержня определяет из решения задачи с концентрированным сжатием. При этом основной вид выкладки состоит в следующем (для стержня с шарнирно опертыми концами, рис. 9.1, а):

Вместо однородного дифференциального уравнения, соответствующего эйлеровой постановке задачи:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0 \quad (9.1)$$

($y = y(x)$ — прогиб точки оси стержня, $\alpha^2 = P/(EI)$, P — сжимающая сила, EI — жесткость при изгибе), рассматривается неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y = \alpha^2 e, \quad (9.2)$$

в котором e — эксцентриситет сжимающей силы. Решение уравнения (9.2), удовлетворяющее граничным условиям задачи, имеет вид:

$$y = e \left[\frac{\cos \alpha \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right], \quad (9.3)$$

где l — длина стержня. За последовательным развитием прогиба можно проследить, например, по значениям прогиба в середине пролета, т. е. при $x = 0,5l$:

$$y \left(\frac{l}{2} \right) = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right). \quad (9.4)$$

Из последнего выражения видно, что с ростом безразмерного параметра αl (и соответственно увеличением сжимающей силы) прогиб монотонно увеличивается и при

$$\alpha l = \pi \quad (9.5)$$

становится неограниченно большим; график, иллюстрирующий зависимость (9.4), представлен на рис. 9.1, б. Под-

ставлен в (9.3) выражение α , наложим соответствующую этому критическому состоянию силу:

$$P = \frac{\alpha^2 E I}{l^2}, \quad (9.6)$$

которая, как видно, совпадает с наименьшей обделочной силой; кстати заметим, что результат (9.6) не зависит от начального эксцентриситета.

В пользу такого метода (называемого иногда *деформационным расчетом обочки*) обычно выдвигается то соображение, что идеальным условием практически быть не может а учет неидеальностей приближает постановку задачи к реальной ситуации.

Но для того чтобы в самом деле приблизить решение к действительности, необходимо пользоваться полным выражением для кривизны изогнутой оси, т. е. учитывать асимметричную нелинейность (заметим, что это вовсе не требуется при исследовании устойчивости с помощью дифференциального уравнения (9.1)), где по смыслу задачи прогиба $w(x)$ бесконечно малый.

Если не обращать внимания на это обстоятельство, то деформационный расчет приобретает несколько условный характер и уже не может претендовать на хорошее приближение к реальной ситуации. Так, если учесть настоящие нелинейности процесса, то для внецентренного сжатия шарнирно опертого стержня вместо кривой, характеризующей силу P — α , представленной на рис. 9.1, б, получится кривая, изображенная на рис. 9.1, а; в принципе она совпадает с кривой на рис. 9.5 предыдущего параграфа, где задача деформационного расчета решалась с учетом конструктивной нелинейности. Поэтому, как правило, деформационный расчет имеет смысл лишь в нелинейной постановке.

Деформационный расчет обладает еще одной особенностью, которая с большой отчетливостью выявляется при анализе следующего случая.

В первом томе книги Бурдериастера и Шибля «Теория упругой устойчивости» (1957) в качестве примера была решена задача о внецентренном сжатии стержня, изображенного на рис. 9.2, а. В принятых выше обозначениях дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня записывается так:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha^2 w = \alpha^2 e \left(\frac{2x}{l} - 1 \right). \quad (9.7)$$

Решение уравнения (9.7), удовлетворяющее граничным условиям задачи, имеет вид

$$w = e \left[\cos \alpha x - (1 + \cos \alpha l) \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l} + \frac{2x}{l} - 1 \right] \quad (9.8)$$

и описывает антисимметричную относительно середины пролета форму изогнутой оси. Так, например, при $\alpha l = 0,25$, т. е. в четверти пролета, прогиб составляет

$$w \left(\frac{l}{4} \right) = \frac{e}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{4}} - 1 \right) \quad (9.9)$$

На рис. 9.2, б изображен график, соответствующий этой зависимости.

Конечно, по адресу этого решения могут быть повторены высказанные выше упреки, касающиеся преобразования

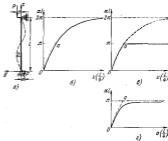


Рис. 9.2. а) Стержень, нагруженный внецентренно; б) кривая равновесных состояний, соответствующая уравнению (9.7); в) кривая равновесных состояний, отражающая деформацию формы равновесия в точке а; д) кривая равновесных состояний с асимметричной нелинейностью.

нелинейными эффектами, но не об этом сейчас пойдет речь; график на рис. 9.2, б приводит к последнему — а, нужно сказать, подозрительному — выводу

о том, что неустойчивость наступает лишь при $\alpha l = 2\pi$, т. е. при силе

$$P = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}, \quad (9.10)$$

вектора прерывающей наименьшее эйлерово значение. Судя по графику, при $\alpha l = \pi$, т. е. при первой эйлеровой силе, рассматриваемая система не имеет никаких опасных тенденций и отмеченное на графике состояние равновесия $\alpha = \pi$ — силе изурядное с качественной стороны, так как не отличается от других состояний равновесия, характеризующихся другими точками кривой.

Над этим стоит задуматься: ведь получается, что благодаря действию антисимметричных косых пар $\pm P_0$ стержень как бы способен благополучно выдержать сущность возмущения возмущения при первой эйлеровой силе. Может ли это быть?

Для выяснения этого вопроса необходимо углубиться в сущность деформационного расчета. Дело в том, что этот метод устанавливает совокупность равновесных состояний, отвечающих различным уровням нагружения, но по своей природе не дает возможности судить об устойчивости этих состояний. Поэтому может оказаться, что качество по различным состояниям (линии не прерывающиеся на графике рис. 9.2, α — это по себе неустойчиво). Мы знаем здесь в виду, например, возможность того, что наряду с таким состоянием равновесия при той же нагрузке существует смежная форма равновесия. В сущности, такая возможность уже обсуждалась выше, в конце § 5.

Для контроля устойчивости того или иного состояния равновесия лучше проверить, не существует ли функция, которая отличается от (9.8), но удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению (9.7). Обозначим эту функцию через $\psi(\xi) + \delta v(\xi)$, где $\delta v(\xi)$ — вариация функции $v(\xi)$. Если окажется, что при данном значении нагрузки существует не равная тождественно нулю функция $\delta v(\xi)$, то форма равновесия $v(\xi)$ должна быть признана неустойчивой; если же $\delta v(\xi) = 0$, то функция $v(\xi)$, как единственная удовлетворяющая дифференциальному уравнению (9.7), описывает устойчивое состояние равновесия. Подставим в дифференциальное уравнение (9.7) сумму $v + \delta v$:

$$\frac{d^2(v + \delta v)}{d\xi^2} + \alpha^2(v + \delta v) = \alpha^2 \left(\frac{2v}{l} - 1 \right). \quad (9.11)$$

Если теперь вычтем уравнение (9.7) из уравнения (9.11), то мы получим следующее дифференциальное уравнение для вариации δv :

$$\frac{d^2 \delta v}{d\xi^2} + \alpha^2 \delta v = 0. \quad (9.12)$$

Заметим, что полученное уравнение полностью совпадает с уравнением (9.1), к которому мы пришли бы, забыв об антисимметричности и исследуя устойчивость произвольной формы равновесия централизованно нагруженного стержня по методу Эйлера. При постоянном росте нагрузки (параметра α) уравнение (9.12) имеет только тривиальное решение

$$\delta v = 0 \quad (9.13)$$

лишь до тех пор, пока $\alpha l < \pi$. При $\alpha l = \pi$ появляется не тривиальное решение дифференциального уравнения (9.12), удовлетворяющее граничным условиям задачи:

$$\delta v = C \sin \frac{\alpha \xi}{l}. \quad (9.14)$$

Следовательно, как только будет достигнут уровень нагружения $\alpha l = \pi$ (при $P = 4\pi^2 EI/l^2$), исследуемая форма равновесия (9.8) становится неустойчивой. Соответственно кривая $P = v$ в действительности должна выглядеть так, как это показано на рис. 9.2, в (наглядности не учтены).

Хотя только что приведенное решение внешне выглядит, как решение задачи Эйлера (сравните дифференциальные уравнения (9.1) и (9.12)), но необходимо иметь в виду, что нашим решением контролируется устойчивость не α и αl в той форме, определяемой параметром (9.8), а не устойчивость произвольной формы равновесия.

Этот пример показывает, что, пользуясь деформационным расчетом и игнорируя исследование устойчивости в прямом смысле слова, мы можем ошибочно оценить истинные свойства системы.

Впрочем, если ввести в рассмотрение четвертую посылку и в виде некоторой малой разницы в эксцентриситетах на концах стержня, то получится кривая $P = v$, изображенная на рис. 9.2, г, весьма близкая к кривой, представленной на предыдущем рис. 9.2, в.

Любопытно отметить, что Бурдэмейстер и Штаб, получив решение в виде (9.8), не смогли правильно истолковать этот результат. Полагая, что при $\alpha l = \pi$ стержень обязательно должен потерять устойчивость, они — вместе

анализа устойчивости решения (9.8) — стремимся обнаружить это по структуре выражения (9.8). Указанным анализом оказалось, что второй член в квадратных скобках выражения (9.8) становится неопределенным при $\alpha l = \pi$, и на этом основании они заключили, что при $\alpha l = \pi$ наступает потеря устойчивости. Биргерштейн и Штойб не заметили, что после раскрытия неопределенности этот член оказывается равным нулю и решение принимает вполне определенный вид:

$$z = c \left(\cos \frac{\alpha x}{l} + \frac{\alpha y}{l} - 1 \right). \quad (9.15)$$

В частности, при $c = 0,25l$ прогиб равен

$$v \left(\frac{l}{4} \right) = 0,207c. \quad (9.16)$$

Как мы видели выше, это вполне определенное и конечное решение аксиоматично; но, чтобы это заметить, недостаточно рассмотреть выражение (9.8) безотчетливо и дифференциальному уравнению (9.7).

Все найденные выше соображения справедливы не только для задач о продольном изгибе стержней. Вспомним, например, задачи, решенные в § 4. Все они были специально сформулированы таким образом, чтобы можно было обнаружить потерю устойчивости в Эйлеровом смысле. Но нередко те же системы могут обладать тем или иным нелинейным, и тогда анализ поведения систем требует решения нелинейных уравнений.

Рассмотрим пример с трубопроводом (рис. 4.10) и убедимся, что и в этом случае метод нелинейности может обнаружить свою недостаточность. Допустим, что ось трубопровода в исходном состоянии имеет S-образную форму:

$$y_0 = l \sin \frac{2\alpha x}{l}. \quad (9.17)$$

Если обозначить через $y = y(x)$ прогибы, возникающие при деформации трубопровода, то наклонная ось опишется суммой $y_0 + y$. Соответственно кинематическая сила инерции жидкости определяется выражением

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 (y_0 + y)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \sin \frac{2\alpha x}{l} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (9.18)$$

и вместо однородного дифференциального уравнения (4.32) мы получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \nu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = f \left(\frac{2\alpha x}{l} \right)^2 \sin \frac{2\alpha x}{l}. \quad (9.19)$$

Напомним, что параметр ν определяется формулой (4.33) в пропорционали скорости течения жидкости. Рассмотрим граничные условия и дифференциальному уравнению (9.19) удовлетворяющее решение

$$y = \frac{f}{\left(\frac{2\alpha}{l} \right)^2 - \nu^2} \sin \frac{2\alpha x}{l}. \quad (9.20)$$

Отсюда можно заключить, что критическое состояние наступает при

$$\alpha l = 2\pi, \quad (9.21)$$

т. е. при скорости течения жидкости вдвое большей, чем было найдено в § 4 (см. формулу (4.37)).

Конечно, невозможно себе представить, чтобы предельная (и притом сколь угодно малая) потеря трубопровода могла явиться причиной его устойчивости. Все дело в том, что само решение (9.20) при $\alpha l = \pi$ становится неустойчивым, и мы можем убедиться в этом, исследуя дифференциальное уравнение в вариациях.

Для этого предположим, что дифференциальное уравнение (9.19) удовлетворяется не только найденным решением (9.20), но и некоторым решением $y(x) + \delta y(x)$. Подставив эту сумму в (9.19) и вычит из результата (9.19), мы получим

$$\frac{d^4 \delta y}{dx^4} + \nu^2 \frac{d^2 \delta y}{dx^2} = 0. \quad (9.22)$$

Отсюда, согласно сказанному в § 4, следует, что при $\alpha l = \pi$ существует ненулевое решение для функции $\delta y(x)$, что свидетельствует о неустойчивости решения (9.20) при $\alpha l = \pi$.

Таким образом, формально пользуясь деформированными расчетами (методом нелинейностей), мы можем не заметить некоторых критических состояний.

Нужно помнить об этой особенности деформированных расчетов (последний параграф и преждем служить таким иллюстрацией), но в то же время было бы совершенно неверным преувеличивать ее значение. Деформированные расчеты, как правило, дают вполне надежные результаты (приведенные выше примеры, конечно, исключение),

особенно если надлежанием образом учесть нелинейности и неустойчивости системы.

Работы Г. Шелера см. в сборнике «Проблемы механики», вып. II (М.: ИЛ, 1959), с. 119. Об аналоге, рассмотренной в книге Виргольдер и Шварц-Стабильности (т. 1, Berlin, 1957, с. 383, см. А. А. Павловский «Статика упругих систем со связями элементами» (М.: Физматгиз, 1964), с. 364—365). См. также доклад В. В. Волгина «О вопросах устойчивости в строительной механике» (в «Проблемах устойчивости в строительной механике».— М.: Стройиздат, 1962, с. 23—24).

§ 10. Две дискуссии (о решениях Р. Лоренца и В. З. Власова)

В этом параграфе мы остановимся на особенностях постановки задачи об устойчивости двух различных расчетных объектов — равновесии скрученной вдоль оси цилиндрической оболочки (в предположении малых осесимметричных перемещений) и аналогично скрученного тонкостенного стержня с открытым профилем (рис. 10.1). Обе задачи

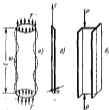


Рис. 10.1. а) Скрутка цилиндрической круговой оболочки; б) закрутка тонкостенного стержня с открытым профилем; в) скрутка цилиндрической оболочки

были решены давно: первая в 1908 г., а вторая в 1940 г., но впоследствии они дали повод для обсуждения спорных, полностью не урегулированных вопросов. Как мы увидим ниже, в конечном счете дело в том, что обеим системам органически присущи неустойчивости и вследствие их наличием в задачах постановка задачи, основанная на предположении, что неустойчивости отсутствуют, попросту невозможна. Тем же более в решениях Р. Лоренца и В. З. Власова (первых исследователей указанных задач) можно заметить стремление игнорировать

неустойчивости и рассматривать системы как эйлеровы. Именно в этом и состоит спорный элемент обоих решений.

Осесимметричные перемещения круговой цилиндрической оболочки, рассматриваемой здесь, образуются. Исторически оправдано, что в первом решении, которое дал Р. Лоренц, эта задача была предельно упрощена; в частности, было предположено, что при повороте устойчивости все образующие оболочки совершают одинаковые Эпинг, очевидно, произвольным (но не абсурдным) предположением Лоренц исключил из рассмотрения такие варианты развития деформации оболочки; лишь много позднее выяснилось огромное значение неосесимметричных форм поворота устойчивости. Полагаю, что такое предположение — как и всякое эйлерово утверждение о виде деформированной поверхности — имеет определенную область определенного знака, а именно в сторону замыкания критического значения нагрузки; однако здесь нас будет интересовать другая сторона решения Лоренца, а именно, в сущности, не связанная с только что указанным допущением. Но прежде всего напомним основные элементы этого решения.

Рассмотрим элементарную балку-полосу, выделенную двумя смежными меридиональными сечениями, продольными через ось оболочки (рис. 10.1, б). Вследствие предположения осевой симметрии деформированного состояния (рис. 10.1, а) углубим все такие балки-полосы толщиной h и каждая из них представим собой балку, лежащую на упругом основании; для любой данной балки-полосы роль упругого основания играет оставшая часть оболочки.

Обозначим z — координату сечения, измеренную вдоль оси оболочки, $w = w(z)$ — поворот точек срединной поверхности, T — срединная сила, отнесенная к единице длины контура поперечного сечения, $D = E\delta^3/12(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость, δ — толщина стенок, μ — коэффициент Пуассона, $A = EA/R^2$, R — радиус поперечного сечения срединной поверхности. При этих обозначениях дифференциальное уравнение продольного изгиба балки-полосы записывается в виде

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + \frac{T}{D} \frac{dw}{dz} + \frac{A}{D} w = 0. \quad (10.1)$$

К этому дифференциальному уравнению необходимо присоединить граничные условия, зависящие от вида опорного устройства на торцах оболочки. Лоренц остановился на

случае шарнирного опирания торцевых сечений и принял

$$w=0, \quad \frac{d^2w}{dx^2}=0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=l. \quad (10.2)$$

В этом случае решение дифференциального уравнения (10.1) имеет вид

$$w=C \sin \frac{\lambda x}{T}. \quad (10.3)$$

Здесь λ — произвольное целое число, равное числу полуволн, на которые подразделяется образующая оболочки при потере устойчивости. Подставляя (10.3) в (10.1), получим уравнение

$$\left(\frac{\lambda x}{T}\right)^4 - \frac{T}{D} \left(\frac{\lambda x}{T}\right)^2 + \frac{k}{D} = 0, \quad (10.4)$$

из которого следует выражение для критического сжимающего усилия:

$$T = D \left(\frac{\lambda x}{T} \right)^2 + k \left(\frac{1}{\lambda x} \right)^2. \quad (10.5)$$

Как видно, результат зависит от числа λ . Последнее можно найти, исходя из условий, что практическое значение имеет наименьшая нагрузка, которая может быть получена из формулы (10.5). Полагая, что $\lambda x \gg 1$ (это допустимо для достаточно длинных оболочек), можно рассмотреть T как функцию непрерывного аргумента λ и записать условие минимума T в виде

$$\frac{dT}{d\lambda} = 0. \quad (10.6)$$

Это дает

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho^2)}, \quad (10.7)$$

и вводя (10.7) получим

$$T_{cr} = \frac{Eh}{R \sqrt{2(1 - \rho^2)}}. \quad (10.8)$$

Отсюда, в частности, вытекает выражение (6.4), которое уже обсуждалось (параграф, в другой связи) в §6. Вскоре после Лоренца С. П. Тимошенко пришел к тому же результату (10.8), пользуясь энергетическим методом; при этом в основу решения было положено выражение (10.3).

В 1926 г. Л. Фейль обратил внимание на особую роль, которую играет граничное условие $w=0$ в рассматриваемой

задаче. Дело в том, что вследствие эффекта Пуассона уже с самого начала нагружения возникает тенденция к поперечному расширению оболочки. Поэтому, если закрепление конца именно такое, как это привал Лоренца, т. е. $w=0$ при $x=0$ и $x=l$, то уже при малых нагрузках средняя поверхность должна принять бочкообразную форму. Следовательно, изгиб образующих все время существует в угло продольному нагружению и перестает служить признаком потери устойчивости. Допустима ли для этой задачи иллюстрация постановки, которой воспользовался Лоренц?

Этот вопрос был решен Н. Гиздаровым в 1928 г. Его рассуждения сводятся к следующему. Для иллюстраций шарнирно опертой балки-полоски на упругом основании решение Лоренца верно, но для оболочки уравнения задачи нужно дополнить несколькими членами. Полное выражение w следует представить в виде суммы двух слагаемых:

$$w = w_1 + w_2, \quad (10.9)$$

где

$$w_2 = \frac{\mu RT}{Eh}. \quad (10.10)$$

есть однокомое для всех точек средней поверхности перемещение, вызываемое осевым сжатием оболочки, а $w_1(x)$ — перемещение, возникающее вследствие изгиба образующих и соответственно удовлетворяющее дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4w_1}{dx^4} + \frac{T}{D} \frac{d^2w_1}{dx^2} + \frac{k}{D} w_1 = 0. \quad (10.11)$$

Если на торцах оболочки граничные условия для функции w имеют вид (10.2), то соответственно для функции w_1 граничные условия следует записать в виде

$$w_1 = -\frac{\mu RT}{Eh}, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=l. \quad (10.12)$$

Такая формулировка задачи сводится к интегрированию однородного дифференциального уравнения (10.11), но при модифицированных граничных условиях (10.12).

Возможен также другой, эквивалентный вариант записи уравнений задачи. Подставив в (10.11)

$$w_2 = w - w_1, \quad (10.13)$$

как это следует из (10.9). Тогда получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{\gamma}{z} \frac{du}{dz} + \frac{k}{z^2} u = \frac{\mu^2}{2D} \quad (10.14)$$

при однородных граничных условиях (10.3).

Следовательно, при правильной постановке задачи в целом оказывается неоднородной; реализуясь любым вариантом — (10.11), (10.12) или (10.14), (10.3), — можно определить, как с ростом нагрузки постепенно развивается прогиб оболочки. На рис. 10.2 показаны последовательно развивающиеся формы прогиба образующих при различных возрастающих значениях сжимающей нагрузки.



Рис. 10.2. Последовательное развитие прогиба образующих при возрастании сжимающей нагрузки

становится все более сложной. Как оказывается, при нагрузке, определенной формулой Лоренца — Тимошенко, перегибания становится неограниченно большими. Поэтому формуле (10.8) можно приписать известное формальное значение — она определяет критическую нагрузку в смысле метода неустойчивостей (см. начало § 8).

Таким образом, при правильном анализе явлений постановки задачи невозможно и речь может идти о деформационном расчете, т. е. исследовании постепенно развивающегося изгиба. Но при такой постановке необходимо учитывать малейшие зазоры. По мере развития изгиба эти зазоры будут сжиматься все более жестко, и впрямь задолго до того, как сжимающее усилие достигнет значения (10.8). Так, неизбежно возникнут пластические деформации (прежде всего у концов оболочки, где изгиб наиболее интенсивен), после чего использование чисто упругих соотношений вообще становится невозможным. По этой причине формула Лоренца — Тимошенко не может правильно ответить также и на вопрос о критической

силе, понимаемой в смысле метода неустойчивостей. Единственное значение, которое можно приписать указанной формуле, — это значение довольно грубой верхней оценки критической нагрузки.

При иных граничных условиях может стать уместной являющаяся постановка задачи. Пусть, например, на торцах оболочки отсутствуют изгибающие моменты, а также связи, препятствующие радиальным перемещениям точек срединной поверхности. Тогда граничные условия должны быть записаны в виде

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2v}{dz^2} + \frac{\gamma}{z} \frac{dv}{dz} = 0 \quad \text{при } z=0 \text{ и } z=l. \quad (10.15)$$

Согласно соотношению (10.9) те же граничные условия относятся и к функции w :

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{\gamma}{z} \frac{dw}{dz} = 0 \quad \text{при } z=0 \text{ и } z=l. \quad (10.16)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию однородного дифференциального уравнения (10.11) при однородных же граничных условиях (10.15); на решение этой являющейся задачи мы не будем останавливаться (она исследована Н. А. Кильбартом в 1942 г., а затем им же вместе с С. Н. Никольским в 1956 г.).

Потери устойчивости изогнутой сжатой оболочкой можно охарактеризовать в 1929 г. Г. Вагнер впервые исследовал круглую форму потери устойчивости центрально сжатого тонкостенного стержня с открытым профилем. При этом Вагнер пришел, что переход в закрученную форму равновесия происходит в виде поворота сечений вокруг центра изгиба. Позднее было замечено, что допущения Вагнера необоснованны и, как правило, не соответствуют действительности. В 1937 г. Лундквист и Флинт определили координаты центра поворота сечений в условиях минимума критического значения сжимающей силы.

Однако существует частный случай, для которого теория Вагнера оказывается верной: если центр изгиба и центр тяжести сечения совпадают (например, в случае двутаврового или зетового сечений), то в той же точке располагается и центр поворота при круглой форме потери устойчивости. Несомненно сохраняется на этом частном случае, который обладает одной любопытной особенностью. В указанном случае критическая сила определяется выражением

(имеется в виду шарнирное закрепление концов)

$$P_{cr} = \frac{1}{r_p} \left(\frac{\pi^2 E J_{sc}}{l^2} + G J_c \right). \quad (10.17)$$

Здесь l — длина стержня, $E J_{sc}$ — секторальная жесткость, $G J_c$ — жесткость свободного кручения, r_p — радиус инерции поперечного сечения. Разумеется, это значение окажется расчетным, если оно меньше критической силы, соответствующей изгибной форме потери устойчивости:

$$P = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2} \quad (10.18)$$

($E J_{min}$ — наименьшая жесткость при изгибе). В случаях, когда поперечное сечение обладает нулевой секторальной жесткостью (например, крестообразное сечение, сечение в форме уголка и т. п.), формула (10.17) приобретает вид

$$P_{cr} = \frac{G J_c}{r_p^2}. \quad (10.19)$$

Отсюда следует неожиданный вывод о том, что в рассматриваемых случаях критическая сила, соответствующая крутильной форме потери устойчивости, не зависит от длины стержня.

Для весьма длинных стержней критическая сила определяется формулой (10.18). С уменьшением длины критическая сила (10.18), определяющая изгибную форму потери устойчивости, будет постепенно увеличиваться и, наконец, сравняется с критической силой (10.19). Длина «равновесного» стержня определяется из равенства выражений (10.18) и (10.19):

$$l_c = \pi r_p \sqrt{\frac{E J_{min}}{G J_c}}. \quad (10.20)$$

Для всех стержней, имеющих длину $l < l_c$, расчетным окажется одно и то же значение (10.19), а дальнейшее уменьшение длины стержня только добьется незначительного увеличения критического значения сжимающей силы. Мы не будем углубляться в причины этого, по-видимому, физически несостоятельного вывода: они далеко выходят за пределы темы настоящего параграфа; заметим только, что все дело в приближенности технической теории тонкостенных стержней и, в частности, в гипотезе деформированности контура сечения, — именно, что чем короче стержень, тем

меньше надлежит эта гипотеза*). Вернемся теперь к основной теме.

Общую теорию устойчивости тонкостенных стержней с открытым профилем разработал В. З. Власов**); его результаты были опубликованы в 1940 г. Остановимся на решении им задачи о эксцентрированном сжатии тонкостенного стержня в области: z — поордината сечения, измеренная вдоль оси стержня, x, y — координаты точек сечения в системе главных центральных осей инерции, α_x, α_y — координаты центра изгиба, $\xi(z)$ и $\eta(z)$ — перемещения центра изгиба, $\Phi(z)$ — угол поворота сечения,

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{2I_x} \left(\int_{\Omega} x^2 dF + \int_{\Omega} xy^2 dF \right) - \alpha_x, \\ P_y &= \frac{1}{2I_y} \left(\int_{\Omega} y^2 dF + \int_{\Omega} x^2 y^2 dF \right) - \alpha_y, \end{aligned} \quad (10.21)$$

— специальные геометрические характеристики сечения, N, M_x и M_y — продольная сила и изгибающие моменты в текущем сечении. Тогда система дифференциальных уравнений, определяющих изгиб и кручение стержня, принимает вид

$$\begin{aligned} E J_z \xi'' + N \xi + (\alpha_x N + M_x) \theta - M_y, \\ E J_z \eta'' + N \eta - (\alpha_y N - M_y) \theta - M_x, \\ (\alpha_x N + M_x) \xi - (\alpha_y N - M_y) \eta + E J_z \theta'' + \\ + (r^2 N + 2M_x - 2M_y - G J_c) \theta = 0. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Как видно, эти уравнения неоднородны, и в общем случае при эксцентрированном сжатии одновременно присутствуют не только сжатие в изгиб стержня, но и его изкручивание. Отметим для исключения из этого общего правила.

а. Сжимающая сила приложена в центре тяжести поперечного сечения. В этом случае (рис. 10.3, а)

$$M_x = -\alpha_y P, \quad M_y = \alpha_x P \quad (10.23)$$

* Эта особенность является следствием допущения теории о деформированности контура сечения. См. Власов В. З. Стержни в области нелинейности. — М.: Наука, 1958, с. 235.

** В. З. Власов, В. З. Власов (1908—1988) — с 1938 г. и до конца жизни заслуженный профессор Московского инженерно-строительного института С 1953 г. — член-корреспондент Академии наук СССР. Автор многочисленных исследований в области теории тонкостенных конструкций и оболочек.

в дифференциальные уравнения (10.22) приобретают вид

$$\begin{aligned} EJ_3 \xi'' + P\xi &= \alpha_2 P, \\ EJ_3 \eta'' + P\eta &= \alpha_2 P, \quad (10.24) \\ EJ_3 \theta'' + (P^2 R + 2P_2 \alpha_2 P + 2P_3 \alpha_2 P - GJ_3) \theta &= 0. \end{aligned}$$

Структура этих уравнений такова, что в каждом из них входит только одна из функций ξ , η и θ . При этом первые два уравнения неоднородны и описывают продольно-поперечный изгиб стержня в двух главных плоскостях. Третье уравнение определяет закручивание стержня; оно однородно и удовлетворяется тривиальным решением $\theta=0$.



Рис. 10.3. а) Сжимающая сила приложена в центре тяжести торцового сечения; б) сжимающая сила приложена в точке, удаленной от оси симметрии торцового сечения

Однако при определенных — критических — значениях силы $P=P_{кр}$ уравнение имеет такое решение от нуля, описывающее закручивание стержня при потере устойчивости. Задача определения $P_{кр}$ является, очевидно, эйлеровой задачей.

б. Сложнее дело обстоит с цилиндрами (например, ось x — см. рис. 10.3, б), в сжимающей силе действующей в плоскости симметрии yz . Обозначив через e эксцентриситет сжимающей силы, имеем

$$\alpha_2 = \beta_2 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = Pe, \quad (10.25)$$

и дифференциальные уравнения (10.22) записываются так:

$$\begin{aligned} EJ_3 \xi'' + P\xi &= Pe, \\ EJ_3 \eta'' + P\eta - P(\alpha_2 - e)\theta &= 0, \quad (10.26) \\ -P(\alpha_2 - e)\eta + EJ_3 \theta'' + (P^2 R + 2P_2 Pe - GJ_3) \theta &= 0. \end{aligned}$$

В данном случае основная форма равновесия представляет собой изгиб в плоскости симметрии yz и определяется первым (неоднородным) дифференциальным уравнением

(10.26). Два последних уравнения однородны и удовлетворяются тривиальным решением

$$\eta = 0, \quad \theta = 0. \quad (10.27)$$

Очевидно, при определенных значениях сжимающей силы P эти уравнения могут иметь ненулевые решения, описывающие изгиб в плоскости yz и закручивание. Определение условий наступления соответствующего критического состояния также является эйлеровой задачей.

По аналогии с этими частными случаями в литературе нет никаких замечаний. Дискуссионным оказывается только один случай, описываемый дифференциальными уравнениями (10.22), образующими неоднородную систему. Именно вследствие неоднородности задачи не допускается эйлеровой постановки, так как каждому уровню нагружения (до некоторого предела) соответствует вполне определенная форма изгиба и закручивания стержня. Если проследить за развитием деформаций стержня при постепенном росте нагрузки, то обнаружится, что на некотором уровне нагружения перемещения ξ , η и θ формально становятся неограниченно большими; это соответствует потере устойчивости в смысле метода неустойчивостей.

Если же интересоваться процессом постепенного развития прогибов ξ и η и угла закручивания θ , а сосредоточить свое внимание только на определении критической нагрузки, то достаточно рассмотреть одну однородную систему, соответствующую неоднородной системе (10.22):

$$\begin{aligned} EJ_3 \xi'' + N\xi + (\alpha_2 N + M_2) \theta &= 0, \\ EJ_3 \eta'' + N\eta - (\alpha_2 N - M_2) \theta &= 0, \quad (10.28) \\ (\alpha_2 N + M_2) \xi - (\alpha_2 N - M_2) \eta + EJ_3 \theta'' + \\ + (P^2 R + 2P_2 M_2 - 2P_3 M_2 - GJ_3) \theta &= 0, \end{aligned}$$

и разложить условие возникновения нетривиальных решений. Именно этим приемом воспользовался В. З. Власов.

Если читатель вернется к началу § 9 этой книги, то заметит, что совершенно таким же образом можно определить критическую силу (как силу, вызывающую неограниченные прогибы) для системы с эксцентриситетом (рис. 9.1); для этого и у него в аналитической правой части дифференциального уравнения (9.2) в искать условия, при которых становится возможным нетривиальное решение соответствующего однородного уравнения. Таким образом, например, определится уровень допустимости на рис. 9.1, б. Но, как мы писали в § 9, исходные дифференциальные уравнения осно-

ваны на предположении о неограниченной линейности задачи; так как с ростом нагрузки постепенно все больше скапливаются нелинейные явления, то действительная кривая $P-u$ выйдет примерно так, как это изображено на рис. 91, а.

Эта оговорка имеет общий характер и в равной мере относится к решению любой неоднородной задачи, в частности задачи о несимметричном скручивании тонкостенного стержня в общем случае. Конечно, если бы процесс нагружения такого стержня был неограниченно линейным, то против приема В. Э. Власова нельзя было бы надвинуть никаких возражений, лишь потребовалось бы ясно понимать то, что в действительности означает определение максимальной нагрузки в соответствующей неоднородной задаче.

Но при постепенном росте нагрузки (и сопутствующих деформаций изгиба и кручения) неизбежно наступит такое состояние стержня, в котором уже нельзя игнорировать нелинейности (в первую очередь — физический природы). Поэтому действительная критическая нагрузка окажется меньше, чем это можно получить из анализа однородной системы (10.28). В этом состоит существо одного из критических замечаний, высказанных по поводу решения В. Э. Власова.

Другое критическое замечание связано с тем, что в действительных конструкциях проблема прочности может оказаться актуальнее проблемы устойчивости: из-за наличия жесткой системы (10.22) нагрузка становится недопустимо высокой задолго до того, как нагрузка приблизится к критическому значению. Поэтому анализ однородной системы (10.28) как бы завышает истинную проблему, возникающую при расчете тонкостенных стержней.

Первое исследование Лоренца было опубликовано в журнале «Zeitschrift für Technische Aesthetik Ingenieur» (1908, т. 52, с. 1708). Статья С. П. Тимошенко см. в «Началах Инженерского искусства» (1934, вып. 1). Работа Л. Феллера «Absolutstabilität des Amplituden zeitlich-festigen Schwingen» напечатана в журнале «Mathematische Nachrichten» (1933). Статья Н. Гесснера см. в «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik» (1928, т. 8, с. 341) (см. также перевод его книги «Степеня упругого тела» (М.: Гостехиздат, 1934, с. 271—278). Рис. 10.2 является лишь копией В. Феллера «Statika in elementaren abhandl.» (М.: Гостройиздат, 1961).

Работа Г. Вайнера опубликована в обобщенном обзоре «Festigkeit 25-Jahre Technische Hochschule Danzig» (1924). Статья Дуалякиса и Феллера см. в NACA Tech. Rep. 569 (1937). Статья Н. А. Вильчского и С. Н. Невроловской опубликована в журнале «Прекращения металла» (1908, вып. 11). Книга В. Э. Власова «Тонкостенные упругие стержни вышелед дивиди: 1-е изд. — М.: Стройиздат, 1949; 2-е изд. — М.: Физматлит, 1968. Критические замечания по поводу решения

В. Э. Власова задачи об устойчивости тонкостенного скрученного стержня см. в работах Л. Н. Коробова (Дифференциальный расчет в устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля) (Труды Московского политехнического института, 1958, т. 70(82), в. 4). Бруссэ «Об асимметричном изгибе и устойчивости рамки» (аналогично скрученному стержню) (об. «Mémoires de l'Académie des sciences», 1889, том VIII). А. А. Голубовский «Степеня стержневых систем со скрученными элементами» (М.: Физматлит, 1963, гл. 9).

§ 11. Потеря устойчивости стержня при растяжении

Основному содержанию настоящего параграфа нам придется предпослать довольно подробное введение, посвященное оценке больших деформаций.

Линейная деформация, представляемая в виде

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (11.1)$$

(l_0 — начальная длина стержня, Δl — его абсолютное удлинение), является одним из основных понятий сопротивления материалов и классической (линейной) теории упругости; выражением (11.1) пользуются всегда при малых величинах ϵ . Однако в последние время, особенно в связи с появлением новых синтетических материалов, способных претерпеть большие удлинения без разрушения, предложен ряд иных способов оценки больших деформаций.

Конечно, величину ϵ , определенную выражением (11.1), можно применять ко всему деформации и в тех случаях, когда удлинения соизмеримы с первоначальной длиной l_0 . Однако также определению будет страдать одним существенным недостатком.

Пусть нагружение ведется ступенчато, причем l_{i-1} и l_i — длины стержня в начале и конце i -й ступени. Тогда приращение деформации на одной ступени процесса по выражению (11.1) составит

$$\Delta \epsilon_i = \frac{l_i - l_{i-1}}{l_{i-1}} \quad (11.2)$$

Сумму приращений $\Delta \epsilon_i$, образующую на каждой ступени общего процесса, естественно считать полной деформацией. Но эта сумма

$$\epsilon = \sum \Delta \epsilon_i = \sum \frac{l_i - l_{i-1}}{l_{i-1}} \quad (11.3)$$

не совпадает с величиной

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (11.4)$$

определенной сразу для всего процесса нагружения. Таким образом, деформации, определенные выражением (11.1), не позволяют пользоваться операцией суммирования.

От этого недостатка свободен иной способ определения большой деформации.

Рассмотрим процесс постепенного удлинения дуги отрезка от значения l_0 до значения большого значения l . Пусть в текущий момент длина отрезка равна z , причем $l_0 < z < l$. На бесконечно малом интервале рассматриваемого процесса происходит такое бесконечно малое удлинение, которое обозначим через dz . При этом приращение относительного удлинения остается постоянным и обозначим dz/z , т. е. писать $dz = d\lambda z$. Соответственно полное относительное удлинение, которое наложится в течение всего процесса, логично определить путем интегрирования:

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dz}{z} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right). \quad (11.5)$$

Этот итоговый результат отличается от выражения (11.1), и притом тем значительно, чем больше отношение $\Delta l/l_0$.

Конечно, при малых отношениях $\Delta l/l_0$ результат (11.5) совпадает с выражением (11.1), так как

$$\ln \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) = \frac{\Delta l}{l_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 + \dots$$

и обе оценки совпадают с точностью до величины второго порядка малости.

Таким образом, логарифмическая деформация (11.5) допускает применение операции суммирования. Это не является единственным достоинством такой меры; можно показать, что известные выражения для объемной деформации в виде $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ остаются в силе и при больших деформациях, если пользоваться логарифмической мерой.

Приставление меры деформации в виде (11.1) было предложено Коши^{*)}, а в виде (11.5) — Геген. Наряду с этими выражениями существуют иные определения меры деформации, данные различными авторами.

Предложение Альманго:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l_0}{l} \right); \quad (11.6)$$

^{*)} Огюстен Луи Коши (1789—1857) — французский математик, член Парижской Академии наук с 1815 г., один из основоположников теории упругости.

предложение Кирхера — Свейтера:

$$\epsilon = 1 - \frac{l_0}{l}; \quad (11.7)$$

предложение Куна:

$$\epsilon = \frac{1}{8} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right); \quad (11.8)$$

предложение Грина:

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1). \quad (11.9)$$

В этих выражениях

$$\lambda = \frac{l}{l_0} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} \quad (11.10)$$

— величина, называемая кратностью (или степенью) растяжения. Если пользоваться этим обозначением, то мера деформации по Коши запишется в виде

$$\epsilon = \lambda - 1, \quad (11.11)$$

а логарифмическая деформация (11.5) — в виде

$$\epsilon = \ln \lambda. \quad (11.12)$$

Насколько велико различие между шкалами ϵ , можно судить по следующему гипотетическому примеру. Пусть при испытании стержня на растяжение были зафиксированы следующие пары опытных данных:

Напряжение, кгс/см ²	0	200	400	600	800	1000
Кратность	1	1,22	1,49	1,82	2,28	2,73

Пусть, далее, требуется образовать зависимость между напряжением σ и деформацией ϵ . Здесь и возникает вопрос о пересчете опытных значений λ на деформации ϵ . Если, что результаты будут зависеть от принятой меры деформации и получаться неодинаковыми.

На рис. 11.1 представимы кривые, получаемые при подстановке формулами и выражениями (11.6) — (11.9), (11.11), (11.12). Как видно, кривые заметно различаются уже на первой ступени нагружения, а затем расходятся все больше и больше. Если пользоваться зависимостями Коши, Грина и Куна, то рассматриваемый материал следует отнести к категории жестких, так как производная $d\sigma/d\epsilon$ постепенно

^{*)} Рассчитаны с учетом растяжения площади поперечного сечения стержня.

уменьшается с ростом деформации ϵ ; и во все время, опираясь на формулы Адамса и Кэрбера — Свейнера, мы должны заключить, что исследуемый материал эластич. Если же применить меру Гюкса, то окажется, что деформирование материала в точности подчиняется закону Гука. Другое совпадение опытных данных приведут к иным кривым, но также значительно различающимся между собой.

Таким образом, понятие физической единичности или нелинейности материала не является анализом естественным, а зависит от выбора меры ϵ (конечно, линейность

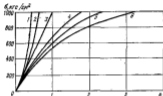


Рис. 11.1. Кривые зависимости напряжения от деформации, полученные при обработке одинаковых опытных данных различными способами: 1 — Адамс, 2 — Кэрбер и Свейнер, 3 — Гюкс, 4 — Коши, 5 — Куа, 6 — Грин

или нелинейность механической системы — понятие вполне объективное, поскольку оно связано с ходом кривой в осей нагрузка — перемещение).

Не следует удивляться тому, что одновременно существует ряд несопоставимых мер деформации. Дело в том, что понятие меры деформации относится к категории «инвариантных» и поэтому в известной степени произвольно. Основания той или иной меры деформации могут представляться несущественными или не вполне догматичными (так, например, мера Коши), но в принципе все принятые ныне варианты могут служить мерой деформации. По этой причине нет оснований приписывать какой-либо мере деформации наименование «истинная»^{*)}; в сущности, каждая

^{*)} Иногда так называют наиболее часто употребляемую логарифмическую меру деформации, предложенную Гюксом.

из мер деформации дает лишь свою особую шкалу. Рейлер справедливо указывает, что за меру деформации может быть принята любая безразмерная функция от λ , если при $\lambda \rightarrow 1$ она вырождается в меру деформации Коши (11.11); этому требованию удовлетворяют, конечно, не только данные выше варианты.

Обратимся теперь к нашей основной теме — вопросу устойчивости стержня при растяжении.

Продольно нагруженный стержень может потерять устойчивость не только при сжимающей нагрузке; в известных условиях возможно неожиданное явление потери устойчивости идеально упругого стержня при растяжении.

Представим себе процесс монотонного нагружения стержня растягивающей силой (рис. 11.2) и будем считать, что увеличение силы происходит настолько медленно, что можно пренебречь инерционными эффектами. Предположим также, что материал стержня неограниченно прочен и следует закону Гука:

$$\sigma = E\epsilon, \quad (11.13)$$

где E — модуль упругости. Мы не ограничим рассмотрение малыми деформациями и потому под σ будем понимать истинное напряжение:

$$\sigma = \frac{P}{F} \quad (11.14)$$

(P — нагрузка, F — истинная площадь поперечного сечения, отличающаяся из-за поперечной деформации от начальной площади сечения F_0), а под ϵ — логарифмическую деформацию.

Приближенно определим истинную площадь поперечного сечения из условия неизменности объема стержня:

$$F = F_0 \frac{L_0}{L}, \quad (11.15)$$

где L — длина стержня в произвольный момент процесса деформирования.

Рассмотрим бесконечно малый интервал этого процесса, в течение которого сила P возрастает на величину dP , а напряжение — на величину $d\sigma$; приращение $d\sigma$ найдем из



Рис. 11.2. Растяжение на ϵ идеально упругого стержня

выражения (11.14):

$$d\sigma = \frac{F dP - P dF}{r_1}. \quad (11.16)$$

Можно сказать, что первый член правой части выражает приращение напряжения за счет приращения нагрузки, а второй член — за счет изменения площади сечения. Согласно (11.16)

$$dF = -\frac{F d\sigma}{r_1} d\sigma. \quad (11.17)$$

Потому выражение (11.16) принимает вид

$$d\sigma = \frac{dP + \frac{P}{r_1} d\sigma}{r_2 \frac{1}{r_1}}. \quad (11.18)$$

С другой стороны, из (11.13) можно получить приращение напряжения $d\sigma$ в виде

$$d\sigma = E d\varepsilon = E \frac{dv}{l}. \quad (11.19)$$

Из выражений (11.18) и (11.19) следует основное дифференциальное уравнение задачи:

$$\frac{dP}{dv} + \frac{P}{l} - \frac{EF}{\sigma} \frac{d\sigma}{dv} = 0. \quad (11.20)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $v=l$, при $P=0$, имеет вид

$$P = \frac{EF \sigma_0}{l} \ln \frac{l}{v}. \quad (11.21)$$

Преобразуем это выражение с таким расчетом, чтобы установить зависимость силы P от перемещения конца стержня:

$$v = l - \Delta, \quad (11.22)$$

Тогда вместо (11.21) получим

$$P = \frac{EF \sigma_0}{1 + \frac{v}{l}} \ln \left(1 + \frac{v}{l} \right). \quad (11.23)$$

На рис. 11.3 изображена кривая, определяющая зависимость (11.23); как видно, она соответствует графику на рис. 0.3, а.

Если задается монотонный рост силы P , например, с помощью последовательного увеличения числа растя-

жений груза, то состояние равновесия возможно лишь до значения силы $P_{кр}$; при больших значениях силы P равновесие становится невозможным. Практически это означает, что при $P=P_{кр}$ длина стержня станет неограниченно увеличиваться, как это показано горизонтальной асимптотой линии на рис. 11.3 (точкой этой линии соответствуют все равно возможные состояния).

При этом способе нагружения падающая ветвь кривой вообще не реализуется.

Значение силы $P_{кр}$, при котором наступает критическое состояние, получим из условия $dP/dv=0$ в виде

$$P_{кр} = \frac{EF \sigma_0}{2}. \quad (11.24)$$

ему соответствует удлинение

$$v_{кр} = l_0 (\mu - 1) \approx 1,72 l_0 \quad (11.25)$$

при достижении которого перемещения неограниченно увеличиваются. Силу $P_{кр}$ естественно назвать критической силой, а значение $v_{кр}$ — критическим удлинением.

Наим выкладки касались случая, когда материал стержня не только неограниченно протеч, но и линейно деформируем. Качественно те же явления можно обнаружить и в



Рис. 11.3. Кривая основной равновесия растянутого стержня

более сложном случае, когда физический закон деформирования определяется полиномиальной функцией

$$\sigma = \sigma_0 (\mu), \quad (11.26)$$

а также если коэффициент Пуассона не равен 0,5.

Тот же график $P=v$ (рис. 11.3) следует толковать по-иному, если задается монотонный рост перемещения v , как, например, в разрывных машинах с винтовым способом нагружения. Здесь внешнее воздействие вводится в систему не по инвентару, а по «деформационному» каналу и соответствующее изменение силы P определяется свойствами самой системы. В этом случае будет последовательно пройдены все точки кривой $P=v$ сначала на восходящей,

а затем на входящей ветви, и ни в какой изотере устойчивости в обычном смысле слова говорить нельзя.

Но в здесь можно отметить любопытные явления, которое является потерей устойчивости и для цилиндрических форм стержня. Для того чтобы выяснить сущность этого явления, откажемся от принятого выше предположения о широкой цилиндричности исходной формы стержня и допустим, что в пределах небольшого участка длины нагруженного стержня поперечные сечения имеют несколько меньшую площадь $F_0 - \Delta F_0$, чем на остальной длине. Из формулы (11.24) видно, что наибольшая сила, которая может возникнуть при постепенном удлинении стержня, составляет

$$P_{кр} = \frac{E(F_0 - \Delta F_0)}{r}, \quad (11.27)$$

При дальнейшем удлинении стержня сила станет увеличиваться и, следовательно, критическое значение (11.24) так и не будет достигнуто; поэтому, в то время как на ослабленном участке деформация будет прогрессивно возрастать, на остальной части стержня будет происходить уменьшение деформации (в связи с уменьшением нагрузки). Удлинение всего стержня будет определяться в основном удлинением указанного участка, сечение которого будет непрерывно уменьшаться.

Таким образом, достаточно любого малого нарушения начальной цилиндрической формы стержня, чтобы на определенном уровне нагружения началось интенсивное местное сужение в пределах малой длины. В этом и состоит потеря устойчивости цилиндрической формы стержня.

Изложенные соображения имеют непосредственное отношение к сложному явлению развития шейки, образующейся при растяжении образцов из пластических металлов.

О различных видах большой деформации см. статьи Н. Н. Малахова (Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1961, № 3), См. также книгу Н. Рейзера «Резистенс» (М.: Наука, 1963) и Ю. Н. Работнова «Сопротивление материалов» (М.: Физматгиз, 1962, § 31).

В большинстве монографий, специально посвященных проблеме устойчивости упругих систем, потеря устойчивости при растяжении вовсе не рассматривается. Исключения представляет книга А. Р. Равичина «Устойчивость рамочных упругих систем» (М.: Гостехиздат, 1958, § 23). Об образовании шейки как проявлении неустойчивости см. в книге А. Навье «Прочность в различных твердых телах» (М.: ИЛ, 1964, т. VIII, § 1 и 2).

§ 12. О критическом внутреннем давлении для сферической оболочки

Явление потери устойчивости растянутого стержня, которое обсуждалось в предыдущем параграфе, может навести на мысль о возможности потери устойчивости сферической оболочки при действии внутреннего давления. Изложим решение этой задачи, данное в цитированной выше книге А. Р. Равичина, а затем сделаем некоторые замечания к этому решению; при этом для простоты будем считать, что $\mu = 0,5$.

Пусть R — радиус оболочки, h — толщина стенки; их начальные значения (при $p=0$) обозначим соответственно через R_0 и h_0 . По аналогии с выражением (11.15) А. Р. Равичин принимает для текущего значения толщины оболочки

$$h = h_0 \frac{R_0}{R}, \quad (12.1)$$

и находит для напряжения выражение

$$\sigma = \frac{pR}{2h} = \frac{pR_0^2}{2h_0 R_0}, \quad (12.2)$$

Предполагая, что материал подчиняется закону Гука, имеем для рассматриваемых здесь условий плоского напряженного состояния следующую связь напряжения σ с деформацией ϵ :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} (1 - \mu) = \frac{\sigma}{2E}. \quad (12.3)$$

Логарифмическая деформация меридиана оболочки равна натуральному логарифму отношения длины меридиана $2\pi R$ к начальной длине меридиана $2\pi R_0$:

$$\epsilon = \ln \frac{R}{R_0}, \quad (12.4)$$

Подставив сюда выражения (12.2) и (12.3), находим

$$p = \frac{2Eh_0 R_0}{R^2} \ln \frac{R}{R_0}. \quad (12.5)$$

На рис. 12.1 изображен график зависимости p от σ , где $p = \frac{2Eh_0 R_0}{R^2}$, $\sigma = R - R_0$ — приращение радиуса оболочки при ее деформации, вычисленные характерным кинематическим параметром нашей задачи. Если теперь воспользоваться условием

$$\frac{dp}{d\sigma} = 0, \quad (12.6)$$

то можно найти, что при

$$R = R_0 \sqrt{\varepsilon} \approx 1,65 R_0 \quad (12.7)$$

давление имеет максимальное значение, равное

$$P_{\text{кр}} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (12.8)$$

По поводу приведенного решения необходимо сделать два замечания, прежде, различной важности.

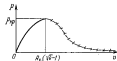


Рис. 12.1. Кривая зависимости давления от радиуса оболочки с равномерным растяжением

Первое замечание связано с выражением (12.1) для толщины, λ изменяющейся в процессе нагружения. На рис. 12.2 изображена схема нагруженного элемента оболочки. Для бесконечно малого интервала процесса нагружения справедливы следующие соотношения, вытекающие из закона Гука (при $\nu=0,5$):



Рис. 12.2. Нагруженный элемент оболочки

$$\delta x_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{1}{2} \frac{\delta \sigma_3}{E},$$

$$\delta x_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{1}{2} \frac{\delta \sigma_3}{E},$$

$$\delta x_3 = -\frac{1}{2} \frac{\delta \sigma_1}{E} - \frac{1}{2} \frac{\delta \sigma_2}{E}.$$

Так как $\sigma_1 = \sigma_2$, а $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то первые два соотношения можно написать проще, подобно (12.3):

$$\delta x = \frac{\sigma_1}{E}, \quad (12.9)$$

а последнему можно придать вид

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda} = -\frac{\delta \sigma}{E}, \quad (12.10)$$

т. е. при учете (12.6)

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -2d\varepsilon. \quad (12.11)$$

Интегрируя, учитывая с учетом (12.4)

$$\ln \frac{\lambda}{\lambda_0} = -2\ln \frac{R}{R_0};$$

откуда окончательно получается

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2. \quad (12.12)$$

Это соотношение, в отличие от (12.1), удовлетворяет условию неизменности объема оболочки при ее нагружении.

Если продолжить выкладки в духе изложенного выше, но исходить не из выражения (12.1), а из выражения (12.12), то получится результат, значительно отличающийся от (12.8), а именно:

$$P_{\text{кр}} = \frac{2\sigma_0 \sqrt{r}}{3R_0}. \quad (12.13)$$

Второе замечание имеет принципиальное значение и относится к случаю, который следует выделять в термин критическое давление в данном случае.

Как мы уже видели выше, нельзя делать выводы относительно поведения системы, если отвлечено не определен способ нагружения. Для стержня можно было рассматривать два варианта нагружения: заданная нагрузка и заданное перемещение. Для рассматриваемой здесь оболочки также следует различать два случая:

- 1) оболочка присоединяется к весьма большому резервуару, давление в котором задано и практически не меняется при увеличении размера оболочки;
- 2) в оболочку затекает газ с помощью насоса заданного и нового поршня (или жидкости).

В первом случае при давлении в резервуаре, большем чем $P_{\text{кр}}$, процесс будет развиваться следующим образом: сначала будет происходить быстрое возрастание давления в оболочке от нуля (в момент подключения к резервуару) до значения $P_{\text{кр}}$; этот этап процесса представляет собой непрерывную последовательность равновесных состояний (рассеяние тепла, явной на рис. 12.1). Как только давление в оболочке достигнет значения $P_{\text{кр}}$, упругое равновесие оболочки становится невозможным; при дальнейшем возрастании давления оболочка будет увеличивать свои

размеры, прохода последовательность. Неравномерность состояний. Поэтому формула (12.3) определяет давление, при котором диаметр оболочки неограниченно возрастает.

Во втором случае дело обстоит по-иному. С ростом количества накиннутой нити радиус оболочки будет непрерывно увеличиваться; если при этом следить за минимальным давлением (по манометру), то, в полном согласии с графиком на рис. 12.1, обнаружится сначала увеличение, а затем падение давления. Невозможно себе представить, что при фиксированном количестве поданного газа (жидкости) оболочка самопроизвольно станет сдуваться. Потому что кривая p — α на рис. 12.1 имеет максимум, но при нагнетании газа (жидкости) система обязательно пройдет в α состояние, описываемое графиком рис. 12.1, включая и падающий участок этого графика.

Суть в том, что в рассматриваемом случае неэластичной перемешки является, очевидно, не давление, а количество накиннутого газа (жидкости); значение давления p (так же как и соответствующее ему перемещение α) определяется этим же количеством. С ростом количества газа (жидкости) радиус оболочки будет монотонно увеличиваться, а давление — сначала увеличиваться, а затем падать.

В этом случае нарушение при максимальном давлении возникает потеря устойчивости формы оболочки того же типа, что и описанная в конце § 11: самое тонкое место оболочки становится все более и более тонким, а самое толстое — более толстым. Это явление можно наблюдать, например, при наддувании камеры колебательного маяка.

Последней по изреченным вопросам науки В. И. Филозофовым ком. это явление в журнале «Труды. матем. и мех.», 1953, № 31.

§ 13. Вращение гибкого вала в жесткой трубке

Термин «гибкий вал» применяется в двух смыслах,

Гибкими называют вала, угловая скорость вращения которых выше критической скорости; слово «гибкий» здесь связывается с малым значением собственной частоты и прогибам вала в закритической области, когда превращается стремление вала к самоцентрированию.

В тот же термин мы будем вкладывать другой смысл, имея в виду особую конструкцию валов, гибких в самом прямом значении этого слова. Такие вали широко используются в качестве привода к приборостроительным, автомобильным приборам и пр. Конструктивно они представляют

собой несколько слоев проволочных спиралей, завитых одна на другой таким образом, что направления нашинки слоев чередуются; такой многослойный пакет помещается в трубку. Эта конструкция вала обеспечивает относительно большую жесткость кручения и весьма малую жесткость изгиба. Устройство трубки таково, что позволяет искривлять ее ось и придавать ей произвольные очертания, определяющие также форму оси вала; однако изгибная жесткость трубки несравненно выше изгибной жесткости вала.

По замыслу конструктора гибкий вал не должен оказывать заметного сопротивления вращению при любом заданном очертании его оси; с иной целью вся полость трубки заполняется густой смазкой, благодаря чему трение вала о трубку практически отсутствует. Тем не менее иногда наблюдается заметное сопротивление вала вращению; это сопротивление меняется в течение одного оборота вала, что приводит к неравномерности вращения валаемого конца вала даже при строгой равномерности вращения ведущего конца. Колебания угловой скорости ведомого конца вала вызывают дрожание стрелки прибора, что является важным эксплуатационным недостатком конструкции. Как оказалось, периодическое изменение сопротивления вала вращению может явиться результатом существования минимального дозоба вала, т. е. искривления его оси до помещения в трубку. Как мы увидим, процесс вращении такого вала сопровождается периодическим повторением своеобразной потери устойчивости.

Способности поведения гибкого вала можно наглядно, пользуясь упрощенной моделью арболитового стержня в жесткой трубке, ось которой является дугой окружности радиуса R ; такую же форму представляет собой ось стержня после помещения его в трубку-оболочку. Допустим, что до помещения в оболочку ось стержня также была дугой окружности, но иного радиуса R_0 ; в частности, стержень первоначально мог быть прямолинейным.

Положение стержня по длине стержня будем определять центральным углом θ , отсчитываемым от одного из концов трубки (рис. 13.1).

В произвольном поперечном сечении стержня примем систему координат, начало которой совпадает с центром тяжести сечения, ось x направим по внешней нормали к оси стержня (рис. 13.2).

Прежде всего найдем начальное нормальное напряжение σ_0 , развивающееся при сборке системы, т. е. при введении стержня в трубку. Будем считать, что плоскость, в ко-

торых лежат криволинейные оси обоих элементов, соответственно перед сборкой совпадают. Тогда после помещения стержня в трубку его ось изменит свою кривизну от

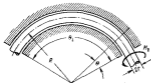


Рис. 13.1. Криволинейный упругий стержень в жесткой трубке

1/R, до 1/R' и во всех сечениях возникнут одинаковые изгибающие моменты, равные

$$M_0' = -\frac{EJ}{R} + \frac{EJ}{R_0} \quad (13.1)$$

(EJ — изгибная жесткость стержня). Им соответствуют нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня

$$\sigma = -\frac{M_0'}{J} x = EJ \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right). \quad (13.2)$$

Рассмотрим теперь, перемещения, деформации и напряжения, возникающие при действии крутящего момента M_0 .



Рис. 13.2. Поперечное сечение стержня: α — угловые координаты точки A; ψ — угол поворота сечения

приложенного к концу стержня. Так как проскальзывание вала вдоль трубки отсутствует, то каждое сечение вала поворачивается, оставаясь в своей плоскости. Силами

трения между стержнем и трубкой будем пренебрегать; таким образом, реакция оболочки будет представлять собой лишь систему распределенных нормальных давлений.

Угол поворота сечений будем обозначать буквой ψ , причем $\psi = \psi(\phi)$.

Определим удлинение какого-либо кругового волокна, след которого в плоскости поперечного сечения обозначен на рис. 13.2 точкой A. Если полярные координаты этой точки до деформации равны r и α , то декартовы координаты составляют

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha.$$

При повороте сечения на угол ψ эта точка займет новое положение A', определяемое координатами

$$x' = r \cos (\alpha + \psi) = x \cos \psi - y \sin \psi, \quad (13.3)$$

$$y' = r \sin (\alpha + \psi) = y \cos \psi + x \sin \psi; \quad (13.4)$$

соответственно относительное удлинение волокна составит

$$\epsilon = \frac{(R+x') - (R+x)}{R+x}$$

Здесь числитель представляет собой разность радиусов кривизны волокна после поворота и до него. Подставляя сюда выражение (13.3) и опуская во множителе в знаменателе слагаемое x , найдем

$$\epsilon = \frac{1}{R} [x (\cos \psi - 1) - y \sin \psi]; \quad (13.5)$$

соответствующее нормальное напряжение определится выражением

$$\sigma' = E\epsilon = \frac{E}{R} [x (\cos \psi - 1) - y \sin \psi]. \quad (13.6)$$

Полное нормальное напряжение найдем, суммируя напряжения (13.2) и (13.6):

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = -\frac{E}{R_0} x + \frac{E}{R} x \cos \psi - \frac{E}{R} y \sin \psi. \quad (13.7)$$

Эта система напряжений приводится к эквивалентным моментам, поперечным направлениям которых показаны на рис. 13.3:

$$M_x = \int y' \sigma' dF = -\frac{EJ}{R_0} \sin \psi, \quad (13.8)$$

$$M_y = -\int x' \sigma' dF = EJ \left(\frac{1}{R} \cos \psi - \frac{1}{R_0} \right). \quad (13.9)$$

Теперь можно перейти к определению сдвигов, касательных напряжений и крутящих моментов. На рис. 13.4 показаны повороты двух смежных поперечных сечений



Рис. 13.3. Изгибание моменты в сечении стержня

спирани. Как видно, угол сдвига равен отношению разности дуг $B\bar{B}'$ и $A\bar{A}'$ к длине дуги OO' :

$$\tau = \frac{\rho}{R} \frac{d\varphi}{2d\theta}. \quad (13.10)$$

Соответственно касательное напряжение по закону Гука равно

$$\tau = \frac{G\rho}{R} \frac{d\varphi}{2d\theta}. \quad (13.11)$$

и крутящий момент составляет

$$M_x = - \int \rho dF = - \frac{G}{R} \frac{d\varphi}{2d\theta} \int \rho^2 dF = - \frac{GJ}{R} \rho \frac{d\varphi}{2d\theta}. \quad (13.12)$$

Если рассмотреть равновесие элемента спирани и составить уравнение моментов относительно оси z , то получится следующее соотношение:

$$\frac{\partial M_x}{\partial \theta} - M_x = 0. \quad (13.13)$$

Подставив сюда (13.12) и (13.11), получим основное дифференциальное уравнение данной задачи:

$$\psi'' - \alpha^2 \sin \psi = 0, \quad (13.14)$$

в котором спрятаны обозначены операции дифференцирования по координате θ и введено сокращенное обозначение

$$\alpha = \sqrt{\frac{EJ}{GJ_p} \frac{R}{R_0}}. \quad (13.15)$$

Решение дифференциального уравнения второго порядка (13.14) должно быть подчинено двум граничным условиям:

$$\psi = \psi_0 \text{ при } \theta = 0, \quad \psi' = 0 \text{ при } \theta = \theta_1. \quad (13.16)$$

С помощью первого условия в решении будет введен заданный угол поворота ведущего конца вала ($\theta = 0$); второе условие выражает предположение о выте отсутствия крутящего момента на ведомом конце ($\theta = \theta_1$).

Для решения дифференциального уравнения (13.14) представим его в виде

$$\psi'' = \alpha^2 \sin \psi.$$

Умножив обе части этого равенства на

$$2\psi' d\theta = \frac{2d\psi}{2\theta} d\theta = 2d\psi$$

и затем проинтегрировав, найдем

$$(\psi')^2 = -2\alpha^2 \cos \psi + C, \quad (13.17)$$

где C — постоянная интегрирования, которая согласно второму условию (13.16) должна быть равна $C = 2\alpha^2 \cos \psi_0$.

Теперь из (13.17) можно найти первую производную:

$$\psi' = \pm \sqrt{2\alpha^2 (\cos \psi_0 - \cos \psi)}. \quad (13.18)$$

Отсюда после преобразования получим

$$d\theta = \pm \frac{d\psi}{2\alpha \sqrt{\cos^2 \frac{\psi_0}{2} - \cos^2 \frac{\psi}{2}}}. \quad (13.19)$$

Принтегрируем это выражение в пределах всей длины стержня, расположенной между сечениями с координатами θ , θ_1 и в этих пределах угол поворота сечений меняется от значения ψ_0 до значения ψ_1 . Результат интегрирования имеет вид

$$\alpha\theta_1 = \pm \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos^2 \frac{\psi_0}{2} - \cos^2 \frac{\psi}{2}}}. \quad (13.20)$$

Равенство (13.20) определяет зависимость между углом поворота ведущего конца стержня ψ_0 и углом поворота ведомого

ного конца ψ_1 ; произведение $\sigma\theta_1$ является параметром системы.

Пользуясь таблицами эллиптических интегралов первого рода, можно получить нужные нам зависимости в численном виде. Эти результаты представлены на рис. 13.5 в виде графиков $\psi_1 = \psi_1(\psi_0)$; на рис. 13.5, а изображены типичные графики для значений параметра $\sigma\theta_1 < \pi/2$, а на рис. 13.5, б — для значений параметра $\sigma\theta_1 > \pi/2$.

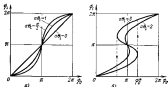


Рис. 13.5. Кривые зависимости угла поворота свободного конца от угла поворота начального сечения: а) при $\sigma\theta_1 < \pi/2$; б) при $\sigma\theta_1 > \pi/2$

Для кривых, изображенных на рис. 13.5, а, характерна однозначная зависимость ψ_1 от ψ_0 . В целом закон движения ведомого конца имеет нелинейный, но плавный характер.

На рис. 13.5, б показаны кривые, соответствующие $\sigma\theta_1 = 2$ и $\sigma\theta_1 = 3$. Здесь отчетливо видно новое качество кривых — неоднозначность зависимости $\psi_1 = \psi_1(\psi_0)$. Если непрерывно увеличивать ψ_0 (как это обычно имеет место, так как задается равномерное вращение ведомого конца), то при значениях $\psi_0 = \psi_0^*$ произойдет перескок — мгновенное увеличение угла ψ_1 , как это показано на рис. 13.5, б стрелкой. Дальнейшее увеличение ψ_0 поведет за собой на некотором участке линейный рост ψ_1 , затем новый перескок и т. д. Следовательно, непрерывному движению ведомого конца соответствует разрывный закон движения ведомого конца.

Тесную связь рассматриваемых здесь явлений с темой настоящей главы можно увидеть, рассмотрев кривую равновесных состояний (рис. 13.6), для того нужно найти закон изменения внешнего крутящего момента при монотонном увеличении угла поворота ψ_0 .

Согласно выражению (13.12) имеем

$$M_0 = -\frac{GJ_p}{l} \psi \Theta_1,$$

где $l = R\theta_1$. Подставляя сюда согласно выражению (13.18)

$$\psi_0 = \pm \sqrt{2a^2 (\cos^2 \psi_1 - \cos \psi_1)},$$

получим

$$M_0 = \mp \frac{GJ_p \sigma \theta_1}{l} \sqrt{2(\cos \psi_1 - \cos \psi_0)}. \quad (13.21)$$

Для того чтобы вести вычисления по этой формуле, нужно подставить в нее значения ψ_1 , определяемые, как было указано выше, в зависимости от значений ψ_0 . Этим будет определена интересующая нас связь между углом поворота ψ_0 и соответствующим моментом M_0 .

Поясним, какой знак должен быть принят в формуле (13.21).

1. При $\psi_0 > \psi_1$ функция $\psi = \psi(\theta)$ является убывающей и, следовательно, $\dot{\psi} < 0$; согласно (13.12) в этом случае $M_0 > 0$, и потому для M_0 должен быть принят знак плюс.

2. При $\psi_0 < \psi_1$ функция $\psi = \psi(\theta)$ является возрастающей и, следовательно, $\dot{\psi} > 0$; рассуждая, как и выше, получим, что в формуле (13.21) должен быть принят знак минус.

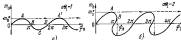


Рис. 13.6. Кривые равновесных состояний: а) при $\sigma\theta_1 = 1$; б) при $\sigma\theta_1 = 2$

На рис. 13.6, а изображена кривая, описываемая уравнением (13.21) в соответствующем случае, когда $\sigma\theta_1 = 1$; по оси ординат отложим значения безразмерного момента $m_0 = \frac{M_0 l}{GJ_p}$, который может быть истолкован как угол закручивания цилиндрического консольного стержня длиной l , обладающего жесткостью кручения GJ_p , под действием момента, приложенного к его свободному концу. Точка А соответствует состоянию, когда дальнейшее увеличение момента невозможно без нарушения равновесия. Далее для постоянного увеличения ψ_0 требуется уже не увеличение

момента, а, наоборот, его уменьшение (участок АВ). Точка В ($\varphi_0 = \pi$) соответствует состоянию неустойчивого равновесия без внешней нагрузки. Для постепенного дальнейшего увеличения φ_0 требуется момент обратного знака (участок ВСД).

Безразмерный момент m' , соответствующий максимуму кривой, определяет наибольшее значение сопротивления повороту; оно является критическим значением нагрузки, при котором происходит потеря упругой устойчивости, т. е. перескок — мгновенное увеличение угла φ_0 , как это показано на рис. 13.6, а штриховыми стрелками. Однако после перескока система не падает в состояние устойчивого равновесия, а сразу же происходит следующий перескок и т. д., т. е. начнется безостановочная серия перескоков, которые будут наблюдаться как непрерывное вращение вадного конца стержня. Очевидно, что значение m' является минимальным значением безразмерного момента, обеспечивающим непрерывное вращение стержня. Так как при больших нагрузках равновесные состояния нет вообще, то описываемая здесь система ближе к другим системам, рассмотренным в этой главе, чем к системам с перескоками, которым была посвящена вторая глава.

На рис. 13.6, б изображена еще одна кривая, построенная по уравнению (13.21) и описывающая сопротивление стержня вращению в случае, когда $\alpha\theta_0 = 2$. Этот график интересен тем, что представляет собой зависимость, многозначную не только относительно φ_0 , но и относительно момента m' . Однако при постепенном заданном росте момента, когда $\varphi_0 = \pi$, происходит потеря устойчивости, а, как в предыдущем случае, начинается безостановочная последовательность перескоков.



Рис. 13.7. Начальные участки кривых равновесных состояний при различных значениях параметра $\alpha\theta_0$.

момента $\alpha\theta_0$; здесь же штриховой прямой показана зависимость $m_0 = m_0(\varphi_0)$ для консольного стержня с прямойлинейной осью.

Легко видеть, что при некоторых значениях параметра $\alpha\theta_0$ криволинейный стержень, свободно лежащий в оболочке, повернуть труднее, чем прямолинейный стержень такой же длины с жестким закреплением. Вот до какой степени гибкий вал может утратить свойства механизма!

Явления, происходящие при вращении вадного конца гибкого вала, во многом сходны с явлениями, происходящими при вращении кольца с равномерно распределенным моментом (рис. 13.8). График зависимости между нагрузкой и углом поворота сечения имеет такой же вид, как график, изображенный выше на рис. 13.6, а. При малых значениях



Рис. 13.8. Связь нагрузки и угла равномерного распределенного окрещивающего момента

момента кольцо обеспечивает упругое сопротивление окрещиванию. Однако существует некоторое критическое значение момента, после достижения которого кольцо теряет устойчивость и начинается безостановочная серия перескоков; кольцо превращается в своеобразный механизм.

Впервые явление гибкого вала при его вращении исследовано в статье Н. И. Гурьяков «Вращение криволинейного упругого стержня в деформированной криволинейной оболочке» (Изв. АН ЛатССР, 1952, № 10), «Сложившаяся ситуация вращении криволинейного упругого стержня в криволинейной трубе» (6, «Вопросы динамики в строительстве», 1958, вып. VI). Дальнейшие разработки той же проблемы даны в работах И. Р. Мамкоид (Тр.п. АСМЭ, 1963, т. E, № 3), А. П. Гурьяков и В. А. Сметанного (6, «Расчеты на прочность в машиностроении», М.: Машиностроение, 1977, № 10).

Задача об окрещивании вадного вала решена Р. Гринманом (см. Боден К., Гринман Р. Телескопная динамика. — М.: Госполитиздат, 1966, т. 3).

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ИСЧЕЗНОВЕНИИ
УСТОЙЧИВЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ

В этой главе рассматривается тот особый вид потери устойчивости, когда при некоторой нагрузке упругая система вообще перестает обладать устойчивыми формами равновесия и переходит от покоя к движению. Этот вид потери устойчивости был проиллюстрирован рис. 0.4 введенной в начале, в частности, с проблемой действия следящих нагрузок, направление которых меняется при изменении конфигурации системы.

§ 14. Следящие нагрузки. Статическая постановка задачи

Положим, что упругая консольная стойка нагружена на конце сжимающей силой P . Чему равно критическое значение силы? Кажется, что известное из общего курса сопротивления материалов формула

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (14.1)$$

дает неублажающий ответ на этот вопрос. В действительности дело обстоит сложнее. При выводе формулы (14.1) предполагалось, что сила P остается при потере устойчивости параллельной своему первоначальному направлению (рис. 14.1, а). Однако такое поведение нагрузки не является единственно возможным; в зависимости от конструктивных особенностей нагруженного устройства возможны бесчисленные иные варианты поведения нагрузки при изгибе стойки.

Для таких вариантов показаны на рис. 14.1, б и в. В первом случае сжимающая сила проходит через фиксированную точку A при любых отклонениях стойки. Во втором случае сжимающая сила остается перпендикулярной к торцу консоли; такую силу иногда называют тангенциальной

(она касательна к оси стержня в конечном сечении), но чаще — следящей. Практически следящая сила может возникнуть, например, при нагнетании струи под давлением из сопла, установленной на конце стойки (или на ракетного двигателя).

Если, следуя методу Эйлера, изучать возможности существования отклоненного состояния равновесия, то нужно исходить из дифференциального уравнения изогнутой оси стержня

$$y'''' + \alpha^2 y'' = 0 \quad (14.2)$$

$$(\alpha^2 = P/EJ),$$

которое в равной степени пригодно для всех трех случаев, изображенных на рис. 14.1; то же относится и к виду общего решения этого уравнения:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x. \quad (14.3)$$

Для названных случаев совпадает и запись граничных условий:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \quad (14.4)$$

Но четвертое граничное условие, относящееся к перемещающейся силе *) на конце стержня (при $x=l$, в случаях а, б и в) выглядит по-разному:

$$\text{в случае а: } EJy'''(l) = -Py'(l), \quad (14.5)$$

$$\text{в случае б: } EJy'''(l) = -P[y'(l) + y(l)/r], \quad (14.6)$$

$$\text{в случае в: } EJy'''(l) = 0. \quad (14.7)$$

В этих различных и скрывается влияние особенностей поведения нагрузки при изгибе стойки.

Если далее применить метод Эйлера, то для случая а получится приведенный выше результат (14.1), а для слу-

*) Здесь применена терминология, которой пользовался П. Ф. Пановко. Под перемещающейся силой подразумевается произвольная сила, действующая в рассматриваемом сечении, но направление этой силы не деформируется и не меняется в момент приложения этой силы к элементу стержня. В отличие от этого, следящей силой называется произвольная по величине сила, направление которой в деформированном состоянии (см. Пановко П. Ф. Строительная механика сооружений. — Д.: Изд.-во государственной академии наук, 1961, т. II, с. 325.

При анализе перемещающей и перемещающей силой поперечной и перемещающей силой параллельно. Но из этого ясно видно, что одному элементу стержня для всякой деформации требуется по мысли П. Ф. Пановко, что первым случаем является в другом, чтобы газера, рассматриваемая конструкция.

ция b — трансцендентное уравнение, определяющее критические значения безразмерного параметра αl :

$$\frac{\lg \alpha l}{\alpha l} = 1 + \frac{r}{T}. \quad (14.8)$$

В частности, при удалении точки A в бесконечность $\alpha l \rightarrow \infty$ и уравнение (14.8) принимает вид $\lg \alpha l = \alpha l$; отсюда следует прямой результат (14.1). При конечных значениях r критическая сила оказывается иной. Так, например, при $r=1$ характеристическое уравнение принимает вид $\lg \alpha l = 2\alpha l$; наименьший отличный от нуля корень этого уравнения $(\alpha l)_{кр} = 1,166$, т. е. критическая сила равна

$$P_{кр} = 1,36 \frac{EI}{r^2}. \quad (14.9)$$

Уже отсюда видно, что критическое значение нагрузок существенно зависит от характера поведения нагрузки при изгибе стоек.

Случай b разберем подробно. Рассматривая отклоненное положение, можно заметить, что горизонтальная составляющая сжимающей силы противодействует изгибу стоек; поэтому можно ожидать, что критическая сила окажется большей, чем по формуле (14.1). Сейчас мы увидим, в какой количественной мере оправдывается это предположение.

Четыре постоянные, входящие в общее решение (14.3), связаны между собой граничными условиями (14.4) и (14.7). Подставляя (14.3) в эти условия, получим однородную систему

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, & C_3 + \alpha C_4 &= 0, \\ C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l &= 0, & & \\ C_3 \cos \alpha l - C_4 \sin \alpha l &= 0. & & \end{aligned} \quad (14.10)$$

Сразу обратим внимание на два последних уравнения — в них входит только постоянные C_3 и C_4 . Система этих уравнений имеет решение $C_3 = C_4 = 0$, которое является тривиальным и соответствует исходной форме равновесия. Иные, отличные от нуля решение системы возможно, если ее определитель равен нулю. Но в нашем случае это исключено, так как

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha l & \cos \alpha l \\ \cos \alpha l & -\sin \alpha l \end{vmatrix} = -1$$

неизвестно от значения параметра αl .

Следовательно, система двух последних уравнений (14.10) имеет только тривиальное решение $C_3 = C_4 = 0$; при

этом из двух первых уравнений (14.10) следует, что $C_1 = -C_2 = 0$.

Этот результат можно интерпретировать только следующим образом: изогнутых форм равновесия стойки не существует ни при каких значениях следующей нагрузки.

Впрочем, внимательный читатель, вероятно, уже заметил несовершенство слова «стойка» на рис. 14.1, а: кривизна оси не согласована по знаку с изгибающим моментом в любом сечении стержня. Попытки исправить рисунок так, чтобы было достигнуто соответствие знаков кривизны и изгибающего момента, обречены на неудачу (попробуйте!). Уже это чисто качественное соображение позволяет усомниться в существовании изогнутых форм равновесия. Итак, прямоугольная форма является единственной формой равновесия.

Из этого правильного заключения некоторые авторы поспешили сделать неверный вывод: поскольку отклоненных форм равновесия нет, то прямоугольная форма устойчива при любых значениях сжимающей силы; соответственно стойка, изображенная на рис. 14.1, а, была названа стойкой, не терпящей устойчивости. В этом выводе допущена ошибка, которая в логике называется подменной тезиса.

В самом деле, следует различать две ситуации: 1) отсутствие отклоненных форм равновесия, т. е. единственность прямоугольной формы равновесия; 2) устойчивость этой прямоугольной формы равновесия.

Лишь правильная постановка задачи Эйлера мешает увидеть разницу между этими ситуациями. Дело в том, что из единственности прямоугольной формы равновесия вовсе не следует, что она устойчива. Например, можно себе представить, что после возмущения этой формы стержень станет колебаться около нее с возрастающей амплитудой. Возможно также монотонное удаление от исходной формы равновесия.

Таким образом, проверка наличия смежных форм равновесия еще не дает права признавать исходную прямоугольную форму равновесия устойчивой. Для проверки системы устойчивости системы необходимо отказаться от статического метода Эйлера и обратиться к динамическому анализу, что и сделано в следующем параграфе. Забегая несколько вперед, сообщим читателю, что критическое значение сжимающей силы составляет $20,06 EI/r^2$ (при равномерном распределении массы вдоль оси).

Обнаруживая также отсутствие смежных форм равновесия само по себе несколько настораживает и заставляет усомниться в самом методе Эйлера. Но существуют более коварные случаи, когда результаты применения метода Эйлера не содержат в себе ничего подозрительного, кажутся вполне правдоподобными, а в действительности лишены какой-либо ценности.

В 1952 г. Г. Циглер подробно и в различных вариантах рассмотрел модельную задачу о движении складной связи на

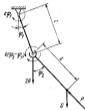


Рис. 14.2 Строение системы под действием складной связи P

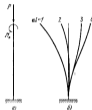


Рис. 14.3 а) Система нагрузки (сила P — складная), б) формы равновесия при различных значениях угла P

сторонную систему с двумя упругими шарнирами (рис. 14.2). В частности, он исследовал возможность эйлеровой потери устойчивости и заявил, что при силе

$$P_{\alpha} = 5 \frac{G}{l} + 3G + \frac{G^2}{2G} \quad (14.11)$$

существует негравитальное положение равновесия. Этот результат выглядит самым странным, а именно значение нагрузки может усилить внимание и привести к ошибочной оценке ситуации. Дело в том, что, как показал Г. Циглер, на самом деле потери устойчивости наступают при меньшей силе

$$P_{\alpha} = \frac{1}{3} \frac{G}{l} + 3G - \sqrt{2 \frac{G^2}{3} + 3 \frac{5}{3} G + G^2},$$

но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению — колебаниям с возрастающими амплитудами. Чтобы выявить такую опасность, необходим динамический анализ возмущенного движения.

Однако можно позанею можно похвастаться и в статическом анализе, если не требовать от него больше, чем он и принести может дать. В частности, статический анализ позволяет выявить некоторые любопытные и в том числе продольно-поперечного изгиба той же стойки, если к ней кроме складной силы одновременно приложена какая-либо поперечная нагрузка, например, внешняя изгибающая момент M_0 на конце стойки (рис. 14.3, а). В данном случае изогнутая ось описывается проекции уравнением (14.3), а для определения постоянных интегрирования служат граничные условия

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad EIv''(l) = M_0, \quad v'''(l) = 0.$$

При этом решение запишется в следующем виде:

$$v = \frac{M_0}{\alpha^2 EI} [(1 - \cos \alpha l) \cos \alpha l + (\alpha l - \sin \alpha l) \sin \alpha l]. \quad (14.12)$$

На рис. 14.3, б изображена изогнутая ось для одного и того же значения M_0 и различных значений параметра $\alpha l = 1; 2; 3; 4$. Здесь сразу бросается в глаза необычность двух последних кривых. Так, например, если к стойке, нагруженной достаточно большой складной силой, дополнительно приложить положительный момент, соответствующий рис. 14.3, а, то стойка изгибается в направлении, противоположном ожидаемому; в частности, при $\alpha l = 4$ даже угол поворота конца стойки противоположен направлению внешнего момента.

Аналогичные свойства стойки можно легко установить и из параметров для прогиба и угла поворота конца стойки:

$$f = \frac{M_0}{\alpha^2 EI} (\alpha l \sin \alpha l + \cos \alpha l - 1), \quad (14.13)$$

$$\varphi = \frac{M_0}{\alpha EI} \sin \alpha l, \quad (14.14)$$

которые вытекают из (14.12). Выражение (14.13) становится отрицательным, когда параметр αl переходит через значение 2,331, а выражение (14.14) — когда αl становится большим, чем π . Я. В. Лыгин, который в 1952 г. впервые отметил описанную аномалию, образно назвал ее «инверсиондом» (в окситанском так называют отрицательные устремления человека, т. е. его склонность поступать противоположно жела-

тому воздействию). Заметим, что при малых значениях αl (например, при $\alpha l = 1$) изгиб стержня происходит вполне нормальным образом, но с ростом αl , в предельном состоянии все больше проявляются аномалии, как бы приближаясь к близкому поперу устойчивости.

Впрочем, по этому признаку все же нельзя предсказать, чему равно критическое значение параметра нагрузки; это значение (при равномерном распределении массы стержня по его длине $\alpha l = 4,48$) может быть найдено только путем динамического анализа и никак не вытекает из выражений (14.13) и (14.14).

Способное заключение А. Прандлера о неограниченной устойчивости стержня, одной изложенной здесь, приведено в его книге «Stabilitätsprobleme der Elastizität» (Berlin: Springer-Verlag, 1930). Любопытно, что в том же году к тому же заключению пришел В. И. Феодосия, см. статью № 95 в первом издании его книги «Общие вопросы и задачи поперечно-изогнутого материала» (И.: Гостехиздат, 1950); в третьем издании дано трижды другое решение.

Случай свободной стержня рассмотрен в книге А. Р. Равеншпана «Устойчивость структур» (М.: Гостехиздат, 1955) под названием «Неограниченной стержней граничных условий». На с. 182 из первого утверждения о неограниченности свободной стержня делается неожиданный вывод: «Потому как стержень вообще условия осуществить невозможно. Здесь совершенно напрасно осуществимость тех или иных граничных условий отождествляется с неограниченностью системы».

Упомянутая выше работа Г. Цингера опубликована в журнале «Ing. Archiv» (1932, т. 26, № 1). Напротив стержня, одного из стержней одной и той же нагрузки, был поставлен доклад Я. Б. Лившица на Всесоюзной конференции по строительной механике (Полтава, 1937 г.). См. также статью В. В. Волкова в сб. «Проблемы устойчивости в строительной механике» (И.: Наука, 1965, стр. 10).

§ 15. Следящие нагрузки. Динамическая постановка задачи

Как уже говорилось во введении, для динамического исследования устойчивости равновесного состояния механической системы изучают ее движение, начинающееся после некоторого начального возмущения; но следствием этого возмущенного движения можно судить об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия. Если окажется, что возмущенное движение происходит в виде колебаний с возрастающими амплитудами или же представляет собой некоординатный уход от состояния равновесия, то последнее неустойчиво.

Вновь обращаясь к вопросу об устойчивости консольной стержня, нагруженной следящей силой, положим, что исходное состояние равновесия, соответствующее прямолинейной

форме оси, каким-либо образом нарушено, и рассмотрим последующее возмущенное движение стержня. Конечно, здесь, как при решении любой динамической задачи, необходимо исходить из определенных предположений относительно распределения масс, даже если собственным в е с с м можно пренебречь по сравнению с силой P . Остановимся на случае, когда масса стержня равномерно распределена по его длине.

Если обозначить интенсивность массы стержня через m , то интенсивность распределенных сил инерции запишется в виде $-m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ и вместо (14.2) для профилей $v = v(x, t)$ выдвигается следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (15.1)$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$v = V(x) e^{i\omega t}, \quad (15.2)$$

где $V(x)$ — неизвестная функция, ω — неизвестная, вообще говоря, комплексная постоянная; от ее значения зависит общий характер возмущенного движения стержня. Если после данного ниже анализа окажется, что ω_0 — действительное число, то решение будет содержать слагаемые типа $e^{i\omega_0 t}$ и $e^{-i\omega_0 t}$, которые в сумме определяют гармонические колебания с частотой ω_0 , в систему следует признать устойчивой. Однако если ω_0 окажется комплексным или чисто мнимым числом, то в решении возникнут слагаемые, содержащие множители типа $e^{i\omega t}$ и $e^{-\omega t}$ (ω — действительное число); независимо от знака ω движение, соответствующее одному из этих слагаемых, представляет собой колебания с возрастающими размахами или монотонный уход системы от положения равновесия, т. е. неустойчивая система — неустойчива.

При малых значениях P частота ω_0 — действительное число, поэтому наша задача сводится к тому, чтобы выяснить, при каком значении следящей силы P частота ω_0 перестает быть действительным числом.

Подставим (15.2) в (15.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции V :

$$\frac{d^4 V}{dx^4} + P \frac{d^2 V}{dx^2} - \omega^2 V = 0. \quad (15.3)$$

Здесь видны безразмерные параметры

$$\xi = \frac{\beta}{J}, \quad \beta = \frac{P_0}{EJ}, \quad \alpha = \alpha_0 L \sqrt{\frac{m}{EJ}}. \quad (15.4)$$

Общее решение уравнения (15.3) записывается в виде

$$V(\xi) = C_1 \sin r_1 \xi + C_2 \cos r_1 \xi + C_3 \operatorname{sh} r_2 \xi + C_4 \operatorname{ch} r_2 \xi, \quad (15.5)$$

где

$$r_{1,2} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\beta}{J}\right)^2 + \omega^2} \pm \frac{\beta}{J}}. \quad (15.6)$$

С помощью граничных условий (14.4) и (14.7) можно получить следующую систему однородных соотношений для постоянных, входящих в (15.5):

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, & r_1 C_1 + r_2 C_2 &= 0, \\ C_1 (r_1^2 \sin r_1 + r_1 r_2 \operatorname{sh} r_2) + C_2 (r_1^2 \cos r_1 + r_1^2 \operatorname{ch} r_2) &= 0, \\ -C_1 (r_1^2 \cos r_1 + r_2 r_1 \operatorname{ch} r_2) + C_2 (r_1^2 \sin r_1 - r_1^2 \operatorname{sh} r_2) &= 0. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Приравняв определитель этой системы нулю, приходим к следующему трансцендентному уравнению, которое сводит к безразмерной нагрузке β с безразмерным параметром частоты ω :

$$\beta^2 + 2\omega^2 + \beta\omega \sin r_1 \operatorname{sh} r_2 + 2\omega^2 \cos r_1 \operatorname{ch} r_2 = 0. \quad (15.8)$$

Если сжимающая сила равна нулю ($\beta=0$), то $r_1^2 = r_2^2 = \omega$ и уравнение (15.8) переходит в обычное частотное уравнение для консольного стержня; корни этого уравнения действительные. При возрастании сжимающей силы два комплексных корня постепенно сближаются и при критическом значении $\beta_{кр} = 20,05$ сливаются в один критический корень (рис. 15.1).



Рис. 15.1. График связи двух корней безразмерных частот с безразмерным параметром нагрузки

При дальнейшем увеличении нагрузки (параметра β) корни остаются комплексными, т. е. движение стержня будет представлять собой колебания с возрастающими амплитудами (флуттер стержня). Можно было бы продолжить исследование и установить, в частности, быстроту возрастания амплитуд колебаний. Однако такое подробное практического интереса обычно не представляется: в конце концов, все равно, произойдет ли стержень неизбежно разрушение стержня через одну или через две секунды после приложения критической силы.

Согласно (15.6) критическая сила определяется выражением

$$P_{кр} = 20,05 \frac{EJ}{L^2}. \quad (15.9)$$

Она приблизительно в восемь раз больше силы, определенной выражением (14.1).

В случаях, когда масса стержня распределена неравномерно по его длине, критическое значение силы окажется несколько иным; однако, как показала эксперимент, оно сравнительно мало зависит от распределения массы по длине. Так, например, если вся масса сосредоточена на конце, то для критического параметра β получится значение 20,19, а если одновременно с равномерно распределенной массой имеется такая же сосредоточенная на конце масса, то $\beta_{кр} \approx 16$.

Впрочем, уже здесь мы должны предупредить читателей: коэффициент в выражении (15.9) заметно изменится, если принять во внимание вязкоупругие свойства материала стержня — даже при исчезающе малых коэффициентах вязкости; об этом см. в конце § 16.

Кратко остановимся на истории вопроса о динамическом анализе устойчивости упругих систем.

Проверка устойчивости формы равновесия упругих систем путем анализа свойств возмущенного движения была предложена давно. Однако, как мы уже искали во введении, в течение долгого времени как бы предполагалось (правда, отчетливо не формулировалось), что оценка, получаемая этим путем, должна совпадать с результатами исследования устойчивости статическими методами.

Неадекватность статического анализа и неадекватность его динамическому исследованию устойчивости упругих систем впервые были отмечены в 1927—1929 гг., когда Е. Л. Николаев попытался с помощью метода Эйлера изучить устойчивость консольного скрученного стержня. При этом неожиданно обнаружилось, что изотопные формы равновесия невозможны только при отсутствии скрущающего момента, когда сжимающая сила достигает Eulerova значения. Отчетливо понимая, что отсутствие смежных форм равновесия еще не означает устойчивости основной формы, Е. Л. Николаев продолжил исследование устойчивости с помощью динамического метода (при этом выяви-

лись также некоторые парадоксальные свойства системы, на которых мы здесь останавливаться не будем).

Выполненные В. Л. Николаев исследования явились темой двух его докладов в Ленинградском механическом обществе (1927 г.). Выступивший при обсуждении П. Ф. Папкович (?) высказал мысль о том, что неудача приложения метода Эйлера к скачко-скрученному спериону связана, по-видимому, с нелинейностью задачи.

В 1939 г. В. И. Рунт попытался применить метод Эйлера к исследованию устойчивости спериона, нагруженного силой с фиксированной длиной действия (рис. 15.2); здесь также выяснилось, что приближенная форма оси стойки является единственной равновесной формой. В том же 1939 г. В. Л. Николаев решил эту задачу путем исследования свойств движения системы вблизи конечное значение критической силы. В статье В. Л. Николаев справедливо отмечается:



Рис. 15.2. Связанная сила с фиксированной длиной действия

«... для консервативных систем частоты колебаний с увеличением нагрузки увеличиваются и переход значенной частоты λ от бесконечных к миним�м происходит при $\lambda=0$; в этих случаях «статический» метод определения критической нагрузки вполне законен. Однако... в случае схемы ниж. Рунта переход значенной λ от бесконечных к миним�м происходит без всякого перехода через нуль, что придает «статический» метод всякого смысла».

Эти различные соображения далеко не сразу были оценены по достоинству. В § 14 мы уже писали об ошибке Пфунтера и В. И. Феодосьева, которые в 1950 г. пытались применить метод Эйлера к решению задачи о действии сдвигающей силы. Верное решение последней задачи было дано лишь в 1952 г. Вексом (для случая равномерного распределения массы по всей длине стойки); это решение было воспроизведено в предыдущем параграфе.

С этого момента, в значительной степени благодаря работам Г. Цаглера и В. В. Болотина, динамический метод

*) Петр Федорович Папкович (1887—1948) — профессор Военно-морской академии, автор многих работ по теории устойчивости упругих систем и строительной механике корабля. С 1933 г. — член-корреспондент АН СССР.

последования устойчивости упругих систем завоевывает всеобщее признание, и в настоящее время с помощью этого метода уже решено много задач о действиях сдвигающих нагрузок. В одном из обзоров по теории устойчивости упругих систем справедливо отмечается: «Важнейшии на то, что в элементарной фазике анализ устойчивости всегда основывается на теории малых колебаний линейной, теории упругой устойчивости, следуя за Эйлером, Лагранжем и Брайаном, почти исключительно основывается на соображениях статики. Довольно курьезным является тот факт, что аналогичная чисто статическая теория является вполне удовлетворительной теорией для линейных упругих систем, нагруженных консервативными силами».

Словом, удивляться следует не тому, что статические методы могут оказаться недостаточными, а скорее тому, что они вообще эффективны для широкого класса задач. Безд, однако, в том, что границы этого класса представляются недостаточно ясными. Хотя обычно применимость метода Эйлера связывают с потенциальностью действующих сил, но строгого обоснования достаточности или необходимости этого предположения пока не дано.

Наставши случаи, когда метод Эйлера оказывается при анализе устойчивости консервативной системы — например, консольной стойки под действием сдвигающей силы, если вся масса системы сосредоточена на конце стойки (этот пример был упомянут Л. М. Балабухом *)), Впрочем, по этому поводу Г. Ю. Давиденко **) писал: «Говоря о применимости бифуркационного критерия в консервативных задачах, мы имеем в виду не только формальную консервативность (существование интеграла энергии), но и положительную знак определенности потенциальной энергии. Обычно это условие выполняется, и о нем не принято говорить. Но в рассматриваемой системе, вследствие ее крайней схематичности, приходится вспомнить и об этих дополнительных условиях. В других случаях схематизация местных свойств спериона (например, при двух сосредоточенных массах или при массе, имеющей инерцию вращения, и тем более при

*) Лев Николаевич Балабух (1910—1978) — профессор Московского высшего технического училища им. Н. Э. Баумана, автор многих работ в области прикладной теории упругости и строительной механики тонкостенных конструкций.

**) Георгий Юстианович (Григорьевич) Давиденко (1916—1984) — профессор Ленинградского инженерно-технического института им. М. И. Калинина, автор исследований ряда вопросов теории пластичной механических систем и теории упругости.

распределенной массе) такой проблемы не возникает, ибо тогда система консервативна и в формальном смысле.

С другой стороны, методом Эйлера устойчиво исследуется устойчивость некоторых неконсервативных систем, в частности нагруженных сдвигными силами. Одним из примеров может служить давно решенная задача об устойчивости радиально сжатого кольца, если радиальная равномерно распределенная нагрузка остается при изгибе кольца нормальной к плоскостной контуре; другой пример — устойчивость двухсторонней стержней при действии сдвигных сил, равномерно распределенных вдоль оси (ряд таких задач был решен в 1969 г. и позднее Г. Лейтвольфом). По-видимому, границы применимости метода Эйлера не совпадают с границей, разделяющей области консервативных и неконсервативных систем. Некоторые положения сформулированы по поводу границы применимости метода Эйлера для систем с двумя степенями свободы были высказаны в 1966 г. В. Хаутером.

Определенный практический интерес представляет задача о действии продольной сдвигающей силы на конце свободного упругого стержня, центр масс которого ускоренно движется; статическая постановка вопроса об упругой устойчивости такого стержня вообще лишена смысла. Первое решение этой задачи было дано в 1960 г. К. Н. Голицыным, который, заменив распределенную массу стержня шестью сосредоточенными массами, нашел для критической силы приближенное выражение

$$P_{кр} = 90 \frac{EJ}{l^2} \quad (15.10)$$

Вследствие значения коэффициента в выражении (15.10) было уточнено рядом исследователей. В частности, в 1965 г. В. Н. Федосеев получил для этого коэффициента значение 109,7; близкий к этому результат получал в том же году Т. Бал.

Наложение более детального исследования устойчивости стержня с равномерно распределенной массой было проведено в 1962 г. Балом [см. его статью в Zeitschr. angew. Math. Phys., 1962, т. 8, № 3]. Одновременно была опубликована статья Г. Циглера, в которой тем же методом была исследована устойчивость системы с двумя степенями свободы (двойной маятник с двумя маятниками) [см. Arch. Mech., 1962, т. XX, с. 49—56]. Случай стержня с распределенной массой, который несет на конце движущуюся сосредоточенную массу, был исследован А. Пардолом [см. Zeitschr. angew. Math. Mech., 1965, т. 35, № 4].

Статья Г. Ю. Давиденко «Устойчивость упругих систем при двустороннем изгибном сдвигании» и обзорная «Проблемы устойчивости в строительной механике» [Ил. Стройиздат, 1962, с. 81—82].

Исследования В. Д. Николая включены в обзорную работу «Упругие нелинейные задачи» [Ил. Гостиздат, 1953, с. 257—266]. Работы В. Н. Рату и В. Л. Николая были опубликованы в вып. 1 «Труды Одесского института вод. трансп. и мелиорации, структура» (1959).

Проблемы устойчивости свободных стержней, подверженного действию сдвигающей силы, рассмотрены работы К. Н. Голицына [Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 4], В. Н. Федосеева [Тр. Ин-та мех. и мет., 1965, т. 39, № 2], Т. Бала [Работы техники в механике, 1965, № 2], Кибана [Vierteljahrsschrift, 1964, т. 8, № 1]; результаты В. Д. Николаева и О. А. Горюхины см. в книге исследователя «Динамика упругих конструкций в условиях свободного движения» [Киев: Наукова думка, 1962].

Работы В. Хаутера опубликованы в журнале «Ing. Archiv» (1966, т. 32); в этой работе также проведено детальное решение задачи о действии равномерно в направлении распределенных продольных сдвигающих нагрузок. В том же журнале вкратце ранее был опубликован упомянутый в тексте текст работы Г. Лейтвольфа.

По аналогии с этим параграфом вопроса читатель может в первую очередь обратиться к работам В. В. Волостина «Квантование энергии теории упругой устойчивости» [М.: Физматлит, 1961] и Г. Циглера «Одним теория устойчивости колебательной» [Ил.: Мир, 1971]. Циглером же с. 136—139 текст исследования по статье Селера в Физматлит «Устойчивость тавила упругих оболочек» [в кн: Упругие оболочки.— М.: ИЛТ, 1962, с. 63].

§ 16. Парадокс Циглера

Важность задачи о действии сдвигающей силы далеко не полностью определяется непосредственными практическими приложениями (которых масса не так много); в гораздо большей мере эта задача имеет общетеоретическое, эстетическое значение. Ее изучение позволило выявить, насколько существенно различны между статическим и динамическим методами исследование устойчивости, а также — в связи с обнаружением «парадокса дестабилизации» — стимулировали анализ своеобразного явления малого трения на устойчивость систем с неконсервативными силами.

Названный парадокс был отмечен Г. Циглером в статье, опубликованной в 1952 г., где, в частности, рассмотрена система с двумя степенями свободы, близкая к изображенной на рис. 14.2, но отличающаяся от последней тем, что граничное поле сил синтезируется отсутствующим в шарнире областью в аэрокосмических и свободных; при этом моменты в шарнирах соответственно имеют вид $-c_1 q_1 - d_1 \dot{q}_1$ и $-c_2 (q_2 - q_1) - d_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)$. Приняв, что массы грузов равны $2m$ и m , Г. Циглер пришел к следующим дифференциальным

уравнениями движения:

$$3m^2\ddot{q}_1 + m^2\ddot{q}_2 + b(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + (3c - P)\dot{q}_1 + (P - c)\dot{q}_2 = 0, \quad (16.1)$$

$$m^2\ddot{q}_1 + m^2\ddot{q}_2 + b(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + c(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = 0,$$

которым соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0, \quad (16.2)$$

причем $A_1 = 7b/(2m^2)$, $A_2 = (7c - 2P)/(2m^2) + b^2/(2m^4)$, $A_3 = -bc/(m^4)$, $A_4 = c^2/(2m^4)$.

Для устойчивости системы необходимо, чтобы все члены в правой части всех корней характеристического уравнения были отрицательными.

Для этого в свою очередь нужно, чтобы величины

$$A_1, \quad A_1A_2 - A_3, \quad A_1A_2A_3 - A_1^2 - A_3^2A_4, \quad A_4 \quad (16.3)$$

были положительными. Эти условия Гурвица для уравнений четвертой степени приводят к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} 1) \quad & b > 0; \quad 2) \quad P < \frac{4bc}{7b} + \frac{b^2}{2m^2}; \\ 3) \quad & P < \frac{41c}{3b} + \frac{b^2}{2m^2}; \quad 4) \quad c^2 > 0. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Из условия 1) следует, что при отрицательном коэффициенте вязкости системы всегда неустойчива. Условие 4) выполняется автоматически. Из условия 3) (более жесткого, чем условие 2)) следует, что при положительном демпфировании критическая сила равна

$$P_{кр} = \frac{41c}{3b} + \frac{b^2}{2m^2}. \quad (16.5)$$

При исчезающе малом демпфировании, когда $b \rightarrow 0$, имеем

$$P_{кр} = 1,464 \frac{c}{T}. \quad (16.6)$$

Эти результаты иллюстрированы в виде диаграммы устойчивости на рис. 16.1 (смачай дополнительную точку \bar{P} , отмеченной на оси абсцисс, будет линиям нулевого наклона). Показ в этой диаграмме не виден ничего неожиданного или парадоксального; во всяком случае явление, которое оказывается трением, представляется вполне естественным — с увеличением трения (коэффициента b) область устойчивости расширяется.

Обратим теперь внимание на результат (16.6), соответствующий случаю исчезающе малого трения ($b \rightarrow 0$). Не кажется ли читателю, что, начиная с самого начала $b \rightarrow 0$, мы приходим к тому же значению (16.6)? Чем оправданным читатель думает, что названное совпадение предвзвешено, тем больше он будет удивлен, ознакомившись со следующими выкладками.

Итак, допустим, что задача решается в исходном предположении $b \rightarrow 0$. Тогда вместо (16.2) характеристическое уравнение оказывается биквадратным:

$$\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_4 = 0, \quad (16.7)$$

причем по-прежнему $A_2 = (7c - 2P)/(2m^2)$, $A_4 = c^2/(2m^4)$. В этом вырожденном случае нельзя непосредственно воспользоваться условиями Гурвица (16.3), и для выяснения свойств возмущенного движения нужно определить знак дискриминанта

$$\Delta = A_2^2 - 4A_4, \quad (16.8)$$

при различных значениях силы P . Если эти значения достаточно малы, то дискриминант (16.8) больше нуля и все корни уравнения (16.7) мнимые. В этом случае возмущенное движение представляет собой сумму двух гармонических колебаний с частотами

$$\sqrt{\frac{A_2}{4}} \mp \sqrt{\frac{A_4}{4} - A_4},$$

т. е. состояние равновесия устойчиво. При возрастании силы дискриминант (16.8) уменьшается и при

$$P = \bar{P} = 2,066 \frac{c}{T} \quad (16.9)$$

меняет знак. Если к системе приложить силу, значение которой больше, чем \bar{P} (16.9), то $\Delta < 0$, и корни уравнения (16.7) уже не будут мнимыми. Среди них найдется по крайней мере одна комплексная с положительной действительной частью или действительный положительный корень. Соответственно возмущенное движение системы окажется неограниченно возрастающим, т. е. состояние равновесия системы неустойчиво. Получается, что если $b \rightarrow 0$, то система



Рис. 16.1. Диаграмма устойчивости для системы Цедера

устойчива при $P < \bar{P}$ и неустойчива при $P > \bar{P}$, т. е. значение \bar{P} (отмеченное на рис. 16.1 дополнительной точкой на оси ординат) как будто определяет критическую силу.

Но результаты (16.5) и (16.9) существенно различаются, т. е. оценки устойчивости системы без демпфирования зависят от того, на каком этапе анализа совершается переход к вырожденной схеме. В этом и состоит парадокс Циغلера.

Для того чтобы разобраться в этой — ну надо сказать, довольно сложной — ситуации, сосредоточим свое внимание на «старом» участке оси ординат $P_{\text{кр}} < P < \bar{P}$ на рис. 16.1. Любая точка этого участка соответствует возмущенное движение в виде гармонических колебаний; именно об этом (и только об этом!) свидетельствует анализ вырожденного характеристического уравнения (16.7). В подобных случаях — когда движение системы без трения представляет собой гармонические колебания — мы склонны думать, опираясь на анализ известных примитивных случаев, что вследствие нулевого трения действительное движение будет носить характер затухающих колебаний (т. е. что система в действительности асимптотически устойчива). Однако для такого заключения (можно сказать, для такой надежды) не всегда есть основания. Принимая с самого начала $b=0$, мы произвольно исследуем в оси ординат и попросту не можем судить об изменении свойств возмущенного движения, если при какой-либо фиксированной силе P в систему вводится трение. Для такого суждения необходим анализ полного характеристического уравнения (16.2), а лишь после этого выяснится, что при любой силе, принадлежащей рассматриваемому участку, в любом, сколь угодно малом коэффициенте вязкости (отрицательном или положительном) система в своем возмущенном движении не будет все время оставаться в окрестности состояния равновесия. Можно сказать, что при сколь угодно малом демпфировании сколь угодно близкая к лежащая на рассматриваемом участке, «соскальзывает» в область неустойчивости. Обозначим, говоря, этот участок представляющий собой бесконечно узкий аппендикс, отходящий от материка устойчивости в окрестности с обеих сторон меридиана неустойчивости.

Отсюда можно заключить, что состояние равновесия, соответствующее участку $P_{\text{кр}} < P$, нельзя считать устойчивым в полном смысле этого слова, поскольку из устойчивости разрушается любым сколь угодно малым трением; также состояние называют иногда «квазиустойчивым».

В каких случаях можно ожидать возникновения такой ситуации? Ужо Г. Циглер отметил, что неопределенное расхождение результатов связано с неконсервативностью рассматриваемой системы. В 1961 г. В. В. Волочин писал: «Если силы не обладают потенциалом, то границы устойчивости, установленные для системы с исчезающе малым затуханием и для системы без затухания, вообще говоря, не совпадают».

Таким образом, под подозрением справедливо попадает любая теория решения задач об устойчивости неконсервативных систем, найденные в исходном предположении об идеальной упругости. Именно так поставлен вопрос в статье В. В. Волочина и И. И. Жиннера (1969 г.), где авторы предлагают затеять пересмотреть результаты прежних исследований устойчивости неконсервативных систем. Названная статья посвящена научному роли каких-либо свойств материала в задачах устойчивости неконсервативных систем, в частности в задаче Бекка; для описания этих свойств авторы пользуются стандартной линейной вязкоупругой моделью твердого тела, который соответствует следующий вид связи между напряжениями σ и деформациями ϵ :

$$\sigma + \sigma = E\epsilon + \dot{\epsilon}$$

(E, σ — постоянны). В частности, было найдено, что при $\alpha=0$ (модель Кельвина — Фойта) и при исчезающе малом значении λ коэффициент в выражении (16.9) оказывается равным 10,94, а не 30,05, как назвал Бекк.

Соборжения, близкие к описанному выше, были также высказаны некоторыми другими авторами, в частности Г. Германом. Там более любопытно, что в 1972 г. появилась статья Г. Германа (в соавторстве с Т. Смитом), в которой рассмотрена задача Бекка с условием в виде сплошного безвращательного упругого основания, но демпфирование с самого начала полагается отсутствующим; при этом было найдено, что критическое значение силы не зависит от коэффициента жесткости основания.

Как установили И. И. Волочин и В. Г. Громов в 1977 г., результат Германа — Смита ошибочен и явился прямым следствием чрезмерно раннего перехода к вырожденной идеальной упругой модели. И. И. Волочин и В. Г. Громов рассмотрели задачу Германа — Смита в предположении, что свойства материала стержня описываются стандартной линейной вязкоупругой моделью, и получили, что критическая сила зависит от коэффициента жесткости основания — даже при обращении в нуль коэффициентов, характеризующих вязкие свойства.

Таким образом, выше стала обфигуринтой точка зрения, согласно которой квазиустойчивые состояния равновесия следует считать практически неустойчивыми.

Однако здесь полезно обратить внимание на одно из упомянутое выше обстоятельств. Дело в том, что если говорить о практических случаях устойчивости, то длительно также концентрироваться, насколько быстро разрастается колебания, возникающие после возмущения квазиустойчивых состояний равновесия; конечно, для этого нужно вычислять вещественные (положительные) части корней характеристического уравнения. Оказывается, что при достаточно малых значениях параметров трения реакция колебаний настолько медленна, что в течение многих тысяч циклов колебания практически не отличаются от гармонических (любознательно, что это свойство характерно от возмущенных движений только около квазистатических состояний равновесия). На этого следует, что для некоторых конструкций критически нагруженных элементов квазиустойчивые состояния могут быть признаны устойчивыми на конечном промежутке времени.

О парадоксе Эйлера см. это также, указывая на с. 22 настоящей книги, монографии В. В. Болотина «Обобщенные методы теории упругой устойчивости» (М.: Физматлит, 1991) и книгу Г. Циглера «Общая теория устойчивости конструкций» (М.: Мир, 1971). Статьи В. В. Болотина и Н. Н. Моисеева опубликованы в журнале *Solids Structures* (1969), № 9; Статьи Г. Циглера и Т. Санта см. в журнале «Проблемы механики» (Ташк. АСМЕ) (1977, № 2); основной вывод этой статьи оверигури Н. Н. Моисеевым и В. Г. Прохоровым в работе, опубликованной в МБ. АН СССР, МТТ (1977, № 4).

Одновременно является внутренним и внешним трением на устойчивость нескольких стержней, нагруженных из свободных концов заданной силой, указано в работе Г. Г. Демченко и В. В. Новожила «Об устойчивости стержня, нагруженного давлением» (МБ. АН СССР, МТТ, 1975, № 1). Общее утверждение, при котором происходит стабилизация нелинейной системы посредством внутреннего трения, см. в работе тех же авторов «Об устойчивости упругих систем с малым внутренним трением» (МБ. АН СССР, МТТ, 1978, № 3).

Глава V

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНЫЙ ИЗГИБ И ПОТЕРЯ УПУГОВОЙ СТОЙКОСТИ

В предыдущих четырех главах мы касались случаев потери устойчивости систем из области упругого материала. В этой главе рассматриваются вопросы упругопластического продольного изгиба и продольного изгиба с учетом ползучести (при обычных несжимающих нагрузках).

§ 17. Упругопластический продольный изгиб; классическая концепция

До сих пор продолжается дискуссия о теории продольного изгиба при напряженных, превосходящих предел пропорциональности, начале которой связано с именами Ф. Энгессера, Ф. С. Ясинского и Т. Кармана. В этом параграфе мы изложим основные черты классической концепции упругопластического продольного изгиба с тем, чтобы в следующем параграфе обратиться к новым главам в этой области.

Известно, что если критическое состояние наступает при напряжениях, меньших предела пропорциональности, то теория Эйлера дает правильное значение критической силы; это отвечает случаю нагружения гибких длинных стоек. Для продольного изгиба относительно коротких стоек необходимы большие сжимающие силы, и потеря устойчивости наступает при напряжениях, превосходящих предел пропорциональности; в этих случаях формулы Эйлера пользоваться нельзя.

В 1845 г. Ламарк впервые вычислял значение гибкости стержня, которое описывает область применимости формулы Эйлера. Оказалось, что наиболее часто встречающийся в инженерной практике значения гибкости



Рис. 17.1. Диаграмма сжатия

лишь в конце XIX века была сделана первая попытка подвести теоретическую основу под вычисление критических сил для коротких стержней. В 1880 г. Энгессер предложил исходить из действительной диаграммы сжатия материала $\sigma = \sigma(\epsilon)$ (рис. 17.1) и вычислять критическую силу по формуле Эйлера, но с заменой модуля упругости E на максимальный модуль E_c :

$$P_c = \frac{\pi^2 E_c J}{l^2}, \quad (17.1)$$

Касательный модуль определяется углом наклона касательной к кривой напряжения — деформации:

$$E_s = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \quad (17.2)$$

и представляет собой переменную величину, зависящую от напряжения σ , при котором происходит потеря устойчивости.

Энгессер пользовался схемами деформаций и напряжений, изображенными на рис. 17.2. За счет нагиба стержня

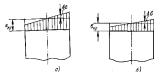


Рис. 17.2. Напряжения деформаций (а) и напряжений (б) по Энгессеру

деформации сжатия в одной части сечения увеличиваются, в другой — уменьшаются; в целом изменение деформации $\Delta\varepsilon$ следует закону плоскости (рис. 17.2, а), а приращение напряжений $\Delta\sigma$ пропорционально соответствующим приращениям деформаций $\Delta\varepsilon$ (рис. 17.2, б), причем коэффициентом пропорциональности служит касательный модуль:

$$\Delta\sigma = E_s \Delta\varepsilon. \quad (17.3)$$

Распределение суммарных напряжений по сечению стержня изображено на рис. 17.2, б. Эта зависимость о распределении напряжений σ приклад и необходимости замены модуля упругости E на касательный модуль E_s .

Однако Энгессер упускал из виду, что зависимость (17.3) справедлива лишь для правой части сечения, где происходит доразрушение части сечения (напряжения сжатия растут). В левой части сечения напряжения сжатия убывают, а затем доразрушение определяется зависимость

$$\Delta\sigma = -E_s \Delta\varepsilon, \quad (17.4)$$

первые экспериментально установленной Герстнером *) и неоднократно подтвержденной впоследствии. Согласно закону Герстнера процессы доразрушения и разрушения отличаются от изображенного на рис. 17.1 и в действительности выглядят так, как это изображено на рис. 17.3, а. Соответственно зигеры в σ должны иметь вид, представленный на рис. 17.3, б и в. Эти особенности в том же 1889 г. отметил Коендер в докладе «Сопоставление скатных стержней,

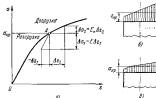


Рис. 17.3. При продвинутом нагибе возникает доразрушение в части сечения: а) зависимость напряжений от деформации; б) зигера деформации; в) зигера напряжений

представленном Международному конгрессу по конструкциям (доклад был опубликован Линч в 1891 г.).

На упущение Энгессера впервые обратил внимание Ф. С. Яковский **, который опубликовал критические замечания по поводу статьи Энгессера. Последний сразу же склонился на критику Ф. С. Яковского и в том же 1889 г. дал исправленную общую формулу для критической силы:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_s I^2}{l^2}, \quad (17.5)$$

*) Ф. И. Герстнер (1796—1833) — профессор Пражского университета в 1829—1830 гг. В 1826 г. организовал в Праге «Общество технических деятелей» и да своим своим делом являлся его директором, выдвигая одновременно обязанности профессора механики. Принадлежит «амальгаме» были впервые опубликованы в 1831 г.

** Яковский Степановичем Николаевичем (1836—1893) после окончания Петербургского института инженеров путей сообщения (1857) был назначен преподавателем и ассистентом лектора работы. С 1865 г. являлся профессором того же института.

в которой E_{*a} — величина (названная позднее приведенным модулем дуплоустой), зависящая от модулей E и E_* , а также от формы поперечного сечения стержня. Однако дискуссия между Энгессером и Янгсином сначала не привлекла широкого внимания, и формула (17.5) была повторно получена Т. Карманом в 1909 г.; Т. Карман также дал выражение приведенного модуля для прямоугольного сечения:

$$E_{*a} = \frac{4EE_*}{\sqrt{E^2 + E_*^2}} \quad (17.6)$$

С тех пор теория приведенного модуля *) получила всеобщее признание, правда только в научной и учебной литературе и долго сохраняла многолетнее значение; с помощью теории приведенного модуля была исследована устойчивость ряда конструкций, более сложных, чем простая стойка.

Для иллюстрации различных подходов к определению критической силы используется упрощенной моделью стойки, изображенной на рис. 17.4; эта модель представляет собой абсолютно твердое тело, опирающееся на два линейно деформируемых опорных стержня.

Прежде всего определим для нашей стойки эйлерову критическую силу, считая, что материал обоих стержней



Рис. 17.4. Стойка-модель



Рис. 17.5. Система деформируемых опорных стержней

стержней неограниченно следует закону Гука. Обозначим через a начальную длину каждого из стержней, через b — расстояние между стержнями и через F — площадь сечения

каждого из стержней. Рассмотрим три состояния системы, изображенные на рис. 17.5. Первое из них (точки m_1 , n_1) относится к случаю, когда амплитуда нагрузки на стойку отсутствует. Второе (точки m_2 , n_2) и третье состояния (точки m_3 , n_3) соответствуют нагружению стойки одной и той же силой — критической нагрузкой P . Через φ обозначим бесконечно малый угол поворота стойки при потере устойчивости; соответствующие дополнительные укорочения опорных стержней при переходе отрезка m_1n_1 в положение m_2n_2 , равны

$$\Delta l_1 = -\frac{\varphi^2}{2}, \quad \Delta l_2 = \frac{\varphi^2}{2} \quad (17.7)$$

Пользуясь законом Гука, можно найти дополнительные усадки и удлинения стержней (положительными будем считать сжимающие усадки):

$$\begin{aligned} \Delta P_1 &= EF \frac{\Delta l_1}{a} = -\frac{EF}{a} \frac{\varphi^2}{2}, \\ \Delta P_2 &= EF \frac{\Delta l_2}{a} = \frac{EF}{a} \frac{\varphi^2}{2}. \end{aligned} \quad (17.8)$$

Сумма моментов этих сил относительно точки O должна равняться моменту внешней силы $P\varphi$ (рис. 17.4):

$$\frac{EF\varphi^2}{2a} \varphi = P\varphi \quad (17.9)$$

Из условия существования отклоненной формы равновесия $\varphi \neq 0$ получаем эйлерову критическую силу:

$$P = \frac{EF\varphi^2}{2a\varphi} \quad (17.10)$$

Положим теперь, что свойства материала стержней характеризуются диаграммой сечений, изображенной на рис. 17.6 (случай материала с линейным удлинением). Ниже предела пропорциональности модуль упругости равен E , а на втором участке начальная модуль постоянен и равен χE (величина $\chi < 1$ предполагается заданной).

Пусть потеря устойчивости происходит при нагружении, соответствующем второму участку диаграммы. Покажем, следуя с законом Герстнера и ставим на равную точку трети Энгессера. Для определения критической силы можно воспользоваться схемой, изображенной на рис. 17.5.

*) Любопытно, что формула Энгессера — Кармана независимо от того, кто ее был выведен еще раз в 1912 г. Сауссониан.

Все рассуждения и выкладки останутся прежними, если вместо модуля с параметром (17.8), вместо модуля упругости E писать касательный модуль νE . В конце концов мы получим для касательно-модульной критической силы формулу

$$P_k = \frac{\nu E J^2}{3L^2} \quad (17.11)$$

Эта формула как и потребуются для некоторых последующих сопоставлений.

Обратимся теперь к выводу формулы критической силы по методу приведенного модуля; для этого придется



Рис. 17.6. Билинейная диаграмма деформации $\sigma - \phi$



Рис. 17.7. Схема деформированной стержневой колонны

рассмотреть рис. 17.7, несколько отличающийся от данного выше (рис. 17.5).

Как и выше, точки m_1, n_1 и m_2, n_2 характеризуют два разных состояния равновесия стоек, соответствующие одной и той же сжимающей силе $P_{кр}$. Поэтому уменьшение силы сжатия слева стержня должно в точности равняться увеличению силы сжатия правого стержня. Но эти приращения сил (отрицательное слева и положительное справа) определяются разными модулями упругости ($E -$ слева и $\nu E -$ справа), и, следовательно, дополнительные деформации стержней не могут быть одинаковыми. Отсюда следует, что отрезок $m_1 n_1$ не проходит через середину отрезка $m_2 n_2$ (в отличие от случая, изображенного на рис. 17.5). При потере устойчивости стоек в паре точек m_1, n_1 в положении m_2, n_2 дополнительные удлинения стержней стержней со стороны

$$\Delta l_1 = -\frac{\nu \delta}{2} + \Delta l, \quad \Delta l_2 = \frac{\nu \delta}{2} + \Delta l, \quad (17.12)$$

рис. Δl — опускание средней точки O . Соответственно дополнительные сжимающие усилия в стержнях равны

$$\begin{aligned} \Delta P_1 &= EF \frac{\Delta l_1}{a} = -\frac{EF}{a} \left(\frac{\nu \delta}{2} - \Delta l \right), \\ \Delta P_2 &= \nu EF \frac{\Delta l_2}{a} = \frac{\nu EF}{a} \left(\frac{\nu \delta}{2} + \Delta l \right). \end{aligned} \quad (17.13)$$

Сумма этих приращений должна быть равна нулю, так как общий сжимающий сила P остается неизменной. Отсюда сначала найдем сила между Δl и δ :

$$\Delta l = \frac{\nu \delta}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu}, \quad (17.14)$$

а затем приращения усилий:

$$-\Delta P_1 = \Delta P_2 = \frac{EF \delta}{a} \frac{\nu}{1+\nu} \varphi. \quad (17.15)$$

Сумма моментов дополнительных усилий ΔP_1 и ΔP_2 относительно точки O , должна равняться моменту внешней нагрузки:

$$2 \frac{EF \delta}{a} \frac{\nu}{1+\nu} \varphi \frac{b}{2} = P_{кр} l \varphi. \quad (17.16)$$

При потере устойчивости $\varphi \neq 0$; отсюда следует

$$P_{кр} = \frac{E \nu l^2 \delta^2}{a l}. \quad (17.17)$$

Эта формула определяет критическую силу по теории Энгессера — Кармана, причем

$$E_{кр} = \frac{\nu E}{1+\nu} \quad (17.18)$$

представляет собой приведенный модуль. Сравнивая этот результат с формулой (17.11), мы видим, что всегда $P_{кр} > P_{кр}$, поскольку $\nu < 1$. При $\nu = 1$ (линейно деформируемый материал) все три формулы (17.10), (17.11) и (17.17) дают одинаковые результаты.

В заключение сделаем одно замечание относительно билинейной диаграммы, показанной на рис. 17.6, которая нередко используется в качестве удобной аппроксимации истинной кривостатической диаграммы. Допустим, что нужно определить критическое напряжение для некоторой заданной стержня, материал которой характеризуется билинейной диаграммой. Предположим сначала, что потеря устойчивости происходит в пределах первого участка, мы должны

вычислить критическое напряжение по формуле Эйлера. Допустим, что найденное таким образом критическое напряжение больше предела пропорциональности. Тогда нужно предположить, что потеря устойчивости происходит на втором участке диаграммы, и воспользоваться формулой Энгессера — Кармана. И вот здесь вполне возможны неожиданный результат: вычисленное по этой формуле критическое напряжение оказывается меньше, чем предел пропорциональности. Коротко говоря, из предположения, что потеря устойчивости соответствует первому участку, следует, что она происходит на втором участке, а когда мы пользуемся зависимостями, относящимися ко второму участку, обнаруживается, что потеря устойчивости происходит на первом участке.

Но этот заколдованный круг порожден лишь избраным способом аппроксимации диаграммы. Для того чтобы выйти из него круга, достаточно несколько изменить вид диаграммы, приняв, что два линейных участка сопрягаются короткой плавной кривой (сплошной, дугой окружности). Ясно, что в этом случае в пределах криволинейного участка имеется широкий набор значений касательного модуля и поэтому всегда найдется такая точка, в которой будет достигнута нужная нагрузка. Следовательно, в описанных выше условиях критическое напряжение будет ближе к пределу пропорциональности; соответственно при резком переходе диаграммы нужно принять, что критическое напряжение равно пределу пропорциональности.

О возможной особенности потери устойчивости при баллистной деформации см. статью В. С. Давыдова «К вопросу об отклонении критической нагрузки для стержня из лавинообразно деформируемого материала» (Вестн. ИГиЛ, Механика, Москва, 1957, вып. 3).

§ 18. Уругоэластический продольный изгиб; современная концепция

После работы Кармана существенно новые идеи в рассматриваемой области не появлялись в течение ряда лет. Новым поворотным пунктом в истории вопроса явилось опубликование в 1946—1947 гг. двух статей Ф. Р. Шелли, первая из которых носила характерное название «Параллель продольного изгиба». Ф. Р. Шелли писал «...при выводе теории приведенного модуля было сделано сомнительное предположение. Предполагалось, по крайней мере по смыслу, что стойка остается прямой при увеличении осевой нагрузки до заранее определенной критической величины, после которой стойка изгибается или концы кончатся».

В самом деле, в концепции Энгессера — Кармана существенно предположение о неизменности продольной силы при переходе стойки из исходного состояния равновесия в возмущенное. Но эти предположения вносят существенное ограничение в исследуемый процесс — практически не исключено, что одновременно с боковым возмущением происходит возмущение и сжимающей силы. Таким, в частности, случаем, когда боковые возмущения происходят в процессе возрастания продольной силы (а не при ее равномерном ее уменьшении). Именно это соотношение является главной особенностью концепции Шелли, которая, как мы увидим ниже, и позволяет уловить возможность потери устойчивости при сжатии, меньших чем $P_{\text{кр}}$.

Пусть поперечный изгиб, — движение основания стойки при отсутствии нагрузки (рис. 17.7). Допустим, следуя Шелли, что при нагружении стойки отклоненные основания равновесия становятся возможными, начиная с некоторого определенного положения $\alpha_{\text{кр}}$, причем положение $\alpha_{\text{кр}}$ соответствует нагрузке $P_{\text{кр}}$, меньшей чем $P_{\text{кр}}$ (значение $P_{\text{кр}}$ заранее, конечно, неизвестно; лишь позднее выяснится, что $P_{\text{кр}} < P_{\text{кр}}$). Допустим, далее, что начиная нагрузку продолжат расти сверх значения $P_{\text{кр}}$, и исследуем возможность отклоненных положений стойки при нагрузках $P_{\text{кр}} + \Delta P < < P_{\text{кр}}$ (ΔP — некоторое малое приращение нагрузки).

Пусть отрезок α_0 соответствует положению основания стойки при некоторой нагрузке $P = P_{\text{кр}} + \Delta P$. Обозначим через Δl среднее укорочение стержней от дополнительной силы ΔP в черт. φ угол поворота стоек (угол наклона отрезка α_0), найдем укорочения стержней, вызванные дополнительной силой:

$$\Delta l_1 = -\frac{P_0}{E} + \Delta l, \quad \Delta l_2 = \frac{P_0}{E} + \Delta l, \quad (18.1)$$

и соответствующие приращения сжимающих усилий:

$$\Delta P_1 = -\frac{E F}{\sigma} \left(\frac{\varphi_0}{2} - \Delta l \right), \quad \Delta P_2 = \frac{\sqrt{3} E F}{\sigma} \left(\frac{\varphi_0}{2} + \Delta l \right). \quad (18.2)$$

В отличие от § 17, перемещения φ и Δl — малые, но конечные величины. Формулы (18.2) занесены в предположении, что на всем этапе постепенного увеличения нагрузки от положения P_0 до значения $P_{\text{кр}} + \Delta P$ (т. е. при переходе от состояния α_0 в состояние α_0) точка в это время поднимается вверх, а точка в это время опускается вниз; другими словами, левый стержень непрерывно разгружается, а правый — догружается.

Сумма приращений (18.2) должна равняться дополнительной силе ΔP :

$$\frac{EF}{a} \Delta l (1 + \nu) - \frac{EFb}{2a} \varphi (1 - \nu) = \Delta P, \quad (18.3)$$

а моменты этих приращений относительно точки O_1 — моменту внешней нагрузки $P = P_0 + \Delta P$:

$$- \frac{EFb}{2a} \Delta l (1 - \nu) + \frac{EFb^2}{4a} \varphi (1 + \nu) = (P_0 + \Delta P) br. \quad (18.4)$$

Из уравнений (18.3) и (18.4) можно найти оба кинематических параметра φ и Δl :

$$\varphi = \frac{b(1-\nu)\Delta P}{2l(1+\nu)(P_{0a} - P)}, \quad (18.5)$$

$$\Delta l = \frac{b^2(1+\nu-2\nu\frac{P}{P_{0a}})\Delta P}{2l(1+\nu)(P_{0a} - P)}. \quad (18.6)$$

Здесь использованы обозначения:

$$P_{0a} = \frac{4EFb^2}{2al}, \quad P_{0b} = \frac{4EFb^2}{l(1+\nu)al}, \quad (18.7)$$

соответствующие найденным ранее формулам (17.11) и (17.17).

Выражения (18.5) и (18.6) выведены в предположении, что в левом стержне происходит разгрузка, условие которой аналитически записывается в виде

$$\frac{\sigma_0}{2} \geq \Delta l. \quad (18.8)$$

Подставляя сюда найденные выражения φ и Δl , получим это условие в простой форме

$$P \geq P_0. \quad (18.9)$$

Таким образом, предположение о том, что в левом стержне возможно только при выполнении условия (18.9), т. е. если нагрузка растет, начиная с уровня P_0 . Следовательно, сила, которую мы выше обозначали чертой P_0 , совпадает с касательной-полюсной нагрузкой P_0 .

Продолжим за изменение отклонения верхнего конца стержня φ при возрастании нагрузки P от значения P_0 до значения P_{0a} , запись вместо (18.5)

$$\varphi = \frac{b(1-\nu)(P - P_0)}{2l(1+\nu)(P_{0a} - P)}. \quad (18.10)$$

Это название изображено сплошной линией на рис. 18.1. Как видно, начиная со значения нагрузки P_0 , прогиб верхнего конца стержня монотонно возрастает и обращается в бесконечность при $P = P_{0a}$. Каждая точка изображенной кривой представляет собой определенное положение равновесия стержня, а вся кривая в целом — кривую состояний равновесия.

Следует отметить, что кривая может быть реализована только непрерывно в направлении возрастания прогиба

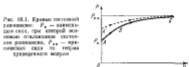


Рис. 18.1. Кривая состояний равновесия: P_0 — касательная сила, при которой возможно отклонение стержня равновесия, P_{0a} — критическая сила по теории упругого изгиба

(A → B → C). Если при $P = P_0$ (точка A) искусственно удержать стержень от поворота и предоставить возможность поворота, доступная только в точке A', то стержень не сместится в состояние равновесия, соответствующее точке B, а процесс будет развиваться так, как показано штриховой линией (при этом в соотношении (18.10) нужно вместо P_0 принять P_0'). Таким образом, в зависимости от обстоятельств любая точка области, расположенной между прямой $P = P_{0a}$ и кривой ABC, может представлять собой состояние равновесия.

Что же является критической силой для рассмотренной стержня — сила P_0 или сила P_{0a} ? Ответ на этот вопрос зависит от того, какой смысл мы желаем вложить в термин «критическая сила». В известной мере это дело вкуса, но, пожалуй, естественнее назвать критической силой P_{0a} , поскольку сразу после достижения этой силы становится возможным отклонение стержня равновесия *).

Специальности новой постановки вопроса заставили Шелли охарактеризовать уравнение (18.10) лишь как «урав-

*) Независимо от концепции Шелли В. Койлер предположил критическое состояние, определяемое полной байфуркацией на оси P, и даже не учитывал ее существования в зависимости от знака продольной силы. При $dP/d\varphi > 0$ (т. е. поворот, в котором Шелли критическое состояние рассматривает, а при $dP/d\varphi < 0$ (т. е. изгиб, рис. 6.3) критическое состояние отсутствует.

нения равновесных состояний стойки для того, чтобы избежать каких-либо вопросов касательно определения теории устойчивости.

Интересная следующая характеристика мачи Шелли, данная Т. Карманом в 1947 г.:

«За последние три десятилетия теория потери устойчивости стоек, свободной осевой нагрузкой, превращавшейся в момент упругости, обсуждалась многими авторами. Однако многие исследования были неубоженными. В настоящее время м-р Шелли выдвигает возражения, которые заслуживают внимания. Исследования проблемы, проведенные Энгессером и мной, были основаны на предположении, что равновесие арки стоек становится неустойчивым тогда, когда изменяется форма равновесия, бесконечно близкая к форме равновесия арки стоек при такой же осевой нагрузке. Правильный ответ на этот вопрос дается путем замены в формуле Эйлера модуля упругости так называемым приведенным модулем. Исследования м-ра Шелли представляют обобщение вопроса».

Получено обратить внимание на слова «при такой же осевой нагрузке». Незамеченность нагрузки при переходе в отклоненное состояние равновесия является существенным предположением теории Эйлера. В сущности, этим предположением накладывается определенное ограничение на ход новой ветви арки равновесных состояний, а именно:

$$\frac{dP}{d\varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0. \quad (18.11)$$

В решении Кармана принято то же ограничение; поэтому такое решение не в состоянии уловить ту особенность бифуркации, которую заметил Шелли. Тот же недостаток присущ и первоначальному предположению Энгессера.

Отказываясь от концепции Шелли и действуя в практических расчетах разумный запас устойчивости по отношению к «касательной-модульной» нагрузке, мы приходим всегда к более простым выкладкам, чем по формуле Энгессера — Кармана (включая в последнюю приведенный модуль зависит иногда сложным образом от формы сечения). Таким образом, в концепции Шелли очевидно сочетается глубина анализа с простотой математических расчетов формул.

Для того чтобы по достоянию оценить практическое значение новой концепции, полезно исследовать процесс нагружения стоек, предполагая, что сжимающая сила приближена к некоторым начальным эксцентриситетом. Ре-

зультат такого исследования схематически представлен кривой 2 на рис. 18.2.

Важно отметить, что при уменьшении начального эксцентриситета кривая будет проходить все ближе к кривой Шелли 1; последняя служит пределом, к которому стремится нижняя кривая при неограниченном уменьшении начального эксцентриситета.

Отсюда следует, что область, расположенная выше кривой 1, вполне реализуема, поскольку всегда неизбежен хотя бы малый эксцентриситет; интенсивное увеличение прогиба начинается не при критической силе,



Рис. 18.2. Кривые равновесных состояний: а) для случая центрального нагружения (кривая Шелли); б) для случая эксцентриситетного нагружения*



Рис. 18.3. Схема с определением осевого размера зоны разгрузки

определенной по теории приведенного модуля, а уже при силе, вычисленной по касательному модулю**).

Нужно отметить, что концепция Шелли не всегда правильно понимается. Иногда представляется дело таким образом, как будто Шелли нашел возможность развития продольного изгиба без разгрузки с выпуклой стороны стоек**). В действительности это не так.

Продолжим за исключением размера c , определенной протяженности зоны разгрузки. Согласно рис. 18.3

$$c = b/2 - \Delta l \rho. \quad (18.12)$$

* Целевая ветвь альтернативной схемы определяется, в конце концов, тем, что достигнуто с ее помощью решение является предельным по отношению к решению (идеализированная схема (при идеальности, стремиться к нулю). Такие продольные свойства присущи схеме Эйлера и Шелли; решение Кармана этими свойствами не обладает.

** См., например, с. 429 книги Н. А. Каргера и Р. Р. Миллора «Сопоставление материалов» (М.: Наука, 1966).

Подставляя сюда выражения (18.5) и (18.6), найдем

$$\epsilon = \frac{v\beta}{1-v} \left(\frac{P}{P_0} - 1 \right). \quad (18.13)$$

При постоянном росте силы P стержня значения P_0 , размер ϵ также увеличивается, начиная со значения $\epsilon=0$ до значения $\epsilon = v\beta(1+v)$, когда $P=P_{0.2}$.

Таким образом, процесс, исследуемый Шенли, протекает с непрерывным ростом зоны разгрузки.

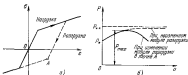


Рис. 18.4. Влияние величины модуля разгрузки β на кривые деформирования при безынерционной нагрузке (линия разгрузки показана штрихами); б) кривые Шенли

а совпадение окончательной формулы Шенли с формулой, предложенной Запеллером, вовсе не означает полной тождественности двух концепций.

Хотя все наши выкладки относились к модели стержня с линейным упругимением, но численные выводы остаются верными и для стержней с непрерывно распределенной упругостью при произвольном виде зависимости $\sigma=\sigma(\epsilon)$.

При уточненном исследовании нужно учесть, что модуль разгрузки на всем протяжении остается постоянным, так как разгрузка в обоих чертах следует рисунку 18.4, а. Поэтому, когда процесс разгрузки пойдет до точки А, общая жесткость системы резко уменьшится и кривая Шенли приобретет падающий участок, как это изображено на рис. 18.4, б.

Статья Ф. Р. Шенли переведена на русский язык и включена в качестве приложения к сборнику Шенли «Модели и методы статистического сопротивления» (М.: Оборонгиз, 1957, т. 18). Убедительный рекомендательный анализ работ Шенли нами выполнен под П. П. Киселевичем в статье «Устойчивость вращающихся стержней с упруго-пластическим стержнем» (Изв. АН СССР, ОТИ, Механика и строительное, 1964, № 6). О росте увеличивающейся зоны разгрузки см. в статье

Н. Т. Павлова «О критической силе сжатия стержня в нагруженной области» (Изв. АН СССР, 1964, т. X, 3). См. также статью Л. А. Шамакова в журнале «Пробл. мат. и мех.» (1971, т. 39).

Существенные моменты обработкой нашей проблемой на упомянутом в работе Н. С. Дубового «Об устойчивости стержня с упруго-пластическим стержнем» (Стр. Моск. инж.-стр. ин-та, 1972, № 100), а также в работе Н. Т. Павлова «Устойчивость стержня на основе статистического метода» (Механика и строительное).

§ 19. Продольный изгиб стержня, входящего в статически неопределимую систему

Известны существенные различия между свойствами статически определимых и статически неопределимых систем. В настоящем параграфе для нас будет важным то обстоятельство, что распределение усилий в стержнях статически неопределимой системы зависит от жесткости ее элементов.

Представим себе, что в процессе роста внешней нагрузки в каком-либо из наших элементов статически неопределимой шарнирно-стержневой системы достигнута критическое состояние и стержень выпучивается^{*)}. Поскольку эффективная продольная жесткость этого элемента, конечно, уменьшится, не будет абсурдным предположить, что произошло на этот элемент сила также уменьшится. Если это так, то уменьшаются сила, по-видимому, окажется недостаточной, чтобы поддерживать искривленную форму равновесия. Таким образом, можно представить себе такую выходящую ситуацию: само критическое состояние как бы создает условия для восстановления устойчивости первоначальной формы равновесия, т. е. стержень возвращается от потери устойчивости. Так ли это в самом деле?

Этот вопрос был поставлен в 1932 г. Н. М. Рабиновичем^{**)}, который впервые решил задачу об определении критической силы для линейного стержня, входящего в состав упругой статически неопределимой системы. В этом случае оказалось, что ситуация, возникновение которой мы подозреваем, в действительности невозможна и критическое значение усилий в стержне, входящем в состав статически

^{*)} Подчеркнем, что речь идет только о линейном стержне; если в каком-либо стержне статически неопределимой системы условия статически определимы (линейный стержень, входящий в любой узел, то условие потери устойчивости такого стержня никак не отличается от условия для соответствующего стержня).

^{**)} Илья Моисеевич Рабинович (1886—1977) — профессор Военно-инженерной Академии имени П. П. Кузнецова, член-корреспондент Академии наук СССР с 1946 г. Герой Социалистического Труда, автор многих работ по строительной механике и расчетам сооружений.

неопределимой упругой системы, такое же, как и для изолированного стержня.

Вопрос об упругопластическом предельном изгибе длинных стержней был исследован А. А. Ильинским в 1960 г. По своей постановке эта своеобразная задача близка к задаче Эйлера в том смысле, что потеря устойчивости рассматривается при неизменной нагрузке, а приложения к этой задаче концепции Шенли будет сказано в конце параграфа.

Как выяснилось, в данном случае действительно создается ситуация, о которой мы писали выше; конечно, сперва не удается полностью набрать потерю устойчивости, но критическое состояние наступает при силах, все-таки отличающихся от критической силы $P_{кр}$ Эйлера — Кармана для изолированного стержня.

Таким образом, статическая неопределимость системы не влияет на значение критической силы упругого стержня и в то же время оказывается существенной при определении критической силы для упругопластического стержня. Чем можно объяснить эту принципиальную разницу?

Причина этой разницы связана с темным, хотя обычно незамечаемым обстоятельством: обжатие концов упругого стержня при потере устойчивости имеет второй порядок малости по сравнению с прогибами, тогда как в случае упругопластического стержня это обжатие имеет порядок малости первого (из-за обжатия оси при переходе в упругопластическое состояние — см., например, рис. 17.7).

Разберем решение А. А. Ильинского на упругой модели, изображенной выше на рис. 17.4, но примем, что верхний конец стойки связан с упругой конструкцией, которую схематически представим в виде пружины (рис. 19.1, а). Обозначим через Q нагрузку на систему; тогда соответствующее значение силы, связывающей ст. о. к. у., будет равно

$$P = \frac{Q}{1 + \frac{c}{2EP}}, \quad (19.1)$$

где c — жесткость пружины. Представим себе, что при некотором значении внешней нагрузки $Q = Q_{кр}$ происходит потеря устойчивости стоек (19.1, б) в эйлеровом смысле, т. е. возникает отличная форма равновесия стойки, бесконечно близкая к основной форме. При этом стержни стержня деформируются так, как было показано на рис. 17.7 при выводе формулы Эйлера — Кармана.

Важно обратить внимание на осадку центральной точки O . Вследствие этой осадки пружина приобретает такое же удлинение ϵ , следовательно, примет на себя дополнительное усилие $\epsilon \Delta c$; соответственно усилие, передаваемое стойке, изменится на величину

$$\Delta P = -\epsilon \Delta c. \quad (19.2)$$

Выясним, при какой силе P возможно отклоненное состояние равновесия стоек (рис. 19.1, в). Дополнительные

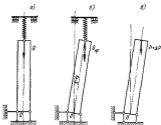


Рис. 19.1. Случай, когда связывающее усилие статически неопределимо: а) эйлеровское состояние; б) эйлеровское состояние системы; в) отклоненное состояние стоек

усиления стержней определяются прежними формулами (17.12), а дополнительные отклоняющие усилия в стержнях — формулами (17.13). Уравнение моментов относительно точки O имеет вид

$$-\Delta P_1 \frac{b}{2} + \Delta P_2 \frac{b}{2} = (P + \Delta P) \Delta y. \quad (19.3)$$

По смыслу решаемой задачи речь идет о бесконечно малых отклонениях стоек, так что перемещение ϵ в Δc , а также дополнительные усилия ΔP_1 , ΔP_2 и ΔP — бесконечно малые величины. Поэтому в уравнении (19.3) следует опустить слагаемое ΔP , после чего уравнение моментов примет вид

$$-\Delta P_1 \frac{b}{2} + \Delta P_2 \frac{b}{2} = P \Delta y. \quad (19.4)$$

Уравнение прогибов на вертикальную ось запишется в виде

$$\Delta P_1 + \Delta P_2 = \Delta P \quad (19.5)$$

(конечно, здесь ΔP означает величину). Подставляя в эти уравнения выражения (18.2) и (19.2), мы приходим к системе, однородной относительно переменных ψ и Δl :

$$\left[\frac{EF\sigma}{\omega} (\nu+1) - P \right] \psi + \frac{EFb}{2a} (\nu-1) \Delta l = 0, \\ \frac{EFb}{2a} (\nu-1) \psi + \left[\frac{EF}{a} (\nu+1) + c \right] \Delta l = 0. \quad (19.6)$$

Отклоненное состояние равновесия возможно лишь при условии, что определитель этой системы равен нулю. Разрешив определитель, мы получим уравнение, содержащее единственную неизвестную — критическую силу, которую мы обозначим через $P_{кр}$; из этого уравнения находим

$$P_{кр} = \frac{EFc}{4\sigma} \left[1 + \nu - \frac{(\nu-\nu^2)}{1+\nu+a} \right], \quad (19.7)$$

где безразмерный параметр

$$\alpha = \frac{c\sigma}{EF} \quad (19.8)$$

характеризует относительную жесткость той упругой системы, которая была схематизирована в виде пружины.

Конечно, из формулы (19.7) следуют известные случаи:

1. Случай $\nu=1$ (упругая потеря устойчивости); параметр α не влияет на значение критической силы, и из формулы (19.7) получается формула Эйлера (17.10).

2. Случай $\alpha=0$ (идеализированная стержень). В этом случае формула (19.7) приводит к формуле (17.17), определяющей критическую силу $P_{кр}$ по теории Энгелера — Кармана.

3. Случай $\alpha>0$. При этом согласно (19.7) $P_{кр} > P_{кр}^0$.

Для определения критической внешней нагрузки $Q_{кр}$ необходимо воспользоваться формулой (19.1); при этом получим

$$Q_{кр} = \frac{EF\sigma}{\omega} \left[1 + \nu - \frac{(\nu-\nu^2)}{1+\nu+a} \right] (1 + 0,5\alpha). \quad (19.9)$$

Однако не всегда $\alpha>0$. А. А. Ильинский указал на существование класса деформируемых конструкций, для которых $\alpha<0$. Эти конструкции таковы, что при продолжном изгибе ось стержня влечет за собой не удлинение, а

уменьшение, приводящееся на стержень усилия $P_{кр}$, т. е. значение ΔP больше нуля.

Деформируемые системы могут встретиться чаще, чем это можно предположить. Такова, например, модель бы, являясь не приметливой системой, изображенная на рис. 19.2. Допустим, что с ростом нагрузки Q стержень достигает критического состояния и при продолжном изгибе подвешенная опора переходит из положения I в положение II . Очевидно, что при опускании опоры усилие в стержне возрастает, т. е. система относится к категории деформируемых. В подобном случае по формуле (19.7) получится $P_{кр} < P_{кр}^0$.

Как было сказано выше, комплексное решение поспоро в духе комплексной Эйлера и Кармана и исследования устойчивости выполнялось в предположении одинаковости нагрузок Q как в основном состоянии равновесия, так и в отклоненном состоянии. В § 18 мы отметили, что такой подход накладывает на решение дополнительное ограничение, которого в действительности не существует.

Если исследовать ту же задачу с позиций, предложенной Шелли, то окажется, что опора устойчивости происходит уже при касательной попутной силе $P_{кр}$, т. е. так же, как если бы стержень был идеализованным.

Конечно, это не означает однозначности достижения критического состояния лишь теми стержнями и стержнями, в которых самое слабое условие статически определимо. Уместно привести следующие слова И. М. Рабиновича: «Критическая нагрузка статически определенными стержнями с полным основанием могла бы быть названа «катастрофической»... Критическая нагрузка «лишнего» стержня не является катастрофической, так как форма, вообще говоря, осталась бы неизменной и после завершения выхода из строя этого стержня; тем более она остается неизменной при частичном ослаблении работы стержня, наступающем после его выпучивания в результате продольного изгиба».

Исследования И. М. Рабиновича включены в его работе «Об устойчивости стержней в статически неопределимых системах (М.; Л.: Гострансиздат, 1932). Работу А. А. Ильинского «Об упруго-пластической устойчивости конструкций, включающей стержневые элементы



Рис. 19.2. Пример деформируемой конструкции

см. в сборнике «Обзоры» (1960, т. XXVII); развитие решения А. А. Мухомова см. в статье В. Г. Дубинина «Общность решений для предельной упругости в нелинейной упругости» (Изв. АН СССР, 1960, т. XXVIII) и в ряде его последующих публикаций.

Расширение тем же автором в области предельноупругих деформаций см. в статье Я. Г. Павлова «В предельном упруго-пластичном режиме стержней в статически неопределимых системах» (Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2).

§ 20. Потеря устойчивости при ползучести материала

Подвывая слезы итальянского города Пизы, несомненно, в том, что здесь родился великий Галилей. Но своей шумной известностью Пиза обязана знаменитой падающей башне. Постепенное наклонение башни, замеченное почти в самом начале постройки, все больше увеличивается. Этот курьезный, уникальный по длительности и отчетливости процесс можно трактовать как своеобразную потерю устойчивости, связанную со свойствами ползучести основания.

Потеря устойчивости при ползучести — явление, представляющее определенную опасность в для менее знаменитых, но nevertheless технических объектов, в особенности при повышенных температурах. Парадокс в упомянутому анализу потери устойчивости этого типа, нужно прежде всего подчеркнуть, что для теоретического решения такой задачи о нагружении конструкции с учетом ползучести необходимо исходить из определенного закона взаимодействия — связи между действующим напряжением σ и скоростью ползучести $\dot{\epsilon}$; во многих случаях экспериментальные данные позволяют принять этот закон (определяющий зависимость) в виде степенной зависимости:

$$\dot{\epsilon}_0 = \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^m, \quad (20.1)$$

где λ и m — постоянные материала (при фиксированной температуре).

Если сами напряжения меняются во времени, необходимо учесть также переменность и угругой деформации; скорость угругой деформации определяется по закону Гука:

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{\dot{\sigma}}{E}. \quad (20.2)$$

Таким образом, суммарная скорость деформации зависит как от напряжения, так и от скорости его изменения:

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^m + \frac{\dot{\sigma}}{E}. \quad (20.3)$$

Такие упрощенные представления достояны для выяснения особенностей потери устойчивости при ползучести; мы будем придерживаться этих представлений, хотя опытные данные допускают также другие варианты записи определяющего уравнения.

Существовать два подхода к анализу потери устойчивости при ползучести. Парвым из них предполагается идеальные условия (отсутствие начальной потери и эксцентриситета сжимающей силы); при этом выучивание происходит после некоторых начальных возмущений (удара или начального смещения). Второой подход основан на учете тех или иных врожденных неидеальностей (например, начальной потери); именно таким образом мы и будем рассматривать задачу.

Как и в предыдущих параграфах этой главы, воспользуемся моделью стоек, изображенной на рис. 20.1, считая, что ползучесть материала стержня стержня описывается уравнением (20.3). Представим себе, что стойка нагружена сжимающей силой P меньшей, чем критерия сила:

$$P < P_0 = \frac{EJl^2}{2al^2}, \quad (20.4)$$

примем напряжения в стержнях стержня не превосходят предела пропорциональности.

Допустим, что до нагружения ось стоек была выведена из вертикали на угол φ_0 . Тогда сразу после приложения нагрузки P угол отклонения будет равен

$$\varphi_0 = \frac{a_0 m}{1 - P/P_0}. \quad (20.5)$$

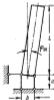


Рис. 20.1. Наклонная ось стоек

Для темпы дальнейшего процесса ползучести существенно, что вследствие асимметрии системы напряжения в правом стержне с самого начала несколько больше напряжения, развивающегося в левом стержне. Из-за разного уровня напряжений ползучесть обоих стержней будет протекать по-разному. Согласно соотношению (20.3) деформации правого стержня будут расти быстрее, чем деформации левого стержня. Важно заметить, что вследствие этого асимметричная система будет усугубляться; следовательно, разница в скорости деформации обоих стержней будет увели-

чнуться. Все это означает, что отклонение оси стойки от вертикали будет происходить со все более возрастающей скоростью.

Строго говоря, исследуемые здесь процессы являются динамическими. Но так как они сравнительно медленны, то инерционные эффекты можно приближенно считать отсутствующими и вместо дифференциальных уравнений движения записывать и исследовать уравнения равновесия.

Любопытная особенность рассматриваемого явления состоит в том, что постоянной нагрузке соответствуют взаимнопересекающиеся кривые в стержнях и именно благодаря этому скорость отклонения стойки оказывается переменной. Как покажет дальнейшее исследование, при некоторых условиях скорость деформации может по истечении некоторого времени устремиться к бесконечности. В этом и состоит явление потери устойчивости рассматриваемой стойки.

Пусть φ — угол отклонения стойки в произвольный момент времени t , P_1 и P_2 — сжимающие усилия в левой и правой стержнях, F — площадь сечения каждого из стержней. Тогда уравнения равновесия стойки имеют вид (рис. 30.2)

$$P_1 + P_2 = P, \quad -P_1 \frac{b}{2} + P_2 \frac{b}{2} = P l \varphi. \quad (20.6)$$

Здесь по-прежнему b — расстояние между опорными стержнями, l — высота стойки. Из этих уравнений находим сжимающие усилия в обоих стержнях:

$$P_1 = \frac{P}{2} \left(1 - 2\varphi \frac{l}{b}\right), \quad P_2 = \frac{P}{2} \left(1 + 2\varphi \frac{l}{b}\right). \quad (20.7)$$

С другой стороны, эти усилия связаны со скоростями деформации стержней известностью (20.3):

$$\frac{d\Delta_1}{dt} = \left(\frac{P_1}{2EF}\right)^m + \frac{P_1}{2F}, \quad \frac{d\Delta_2}{dt} = \left(\frac{P_2}{2F}\right)^m + \frac{P_2}{2F}. \quad (20.8)$$

Подставим в левую часть этих уравнений $v_1 = \Delta_1/l$ и $v_2 = \Delta_2/l$ (l — начальная длина опорных стержней), а в

правую часть — выражения (20.7); тогда получим

$$\frac{d\Delta_1}{dt} = a \left[\frac{P}{2EF} \left(1 - \frac{2\varphi l}{b}\right) \right]^m - \frac{P\varphi l}{2EF}, \quad (20.9)$$

$$\frac{d\Delta_2}{dt} = a \left[\frac{P}{2F} \left(1 + \frac{2\varphi l}{b}\right) \right]^m + \frac{P\varphi l}{2EF}.$$

Этими соотношениями скорости укорочений обоих опорных стержней связаны с углом отклонения стойки; но между самими укорочениями и этим углом существует очевидная зависимость

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{b}, \quad (20.10)$$

дифференцируя которую по времени, находим

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{b} \left(\frac{d\Delta_2}{dt} - \frac{d\Delta_1}{dt} \right). \quad (20.11)$$

При учете выражений (20.9) получим дифференциальное уравнение для угла φ отклонения стойки:

$$\dot{\varphi} = \frac{a}{b} \left[\left(1 + \frac{2\varphi l}{b}\right)^m - \left(1 - \frac{2\varphi l}{b}\right)^m \right] \left(\frac{P}{2EF}\right)^m + \frac{2P\varphi l}{bEF}. \quad (20.12)$$

Оно допускает разделение переменных и, таким образом, приводит к квадратурам. Пусть, например, $m=3$ *); тогда из него (20.12) получим

$$\dot{\varphi} = \varphi \left[1,5 \left(\frac{b}{l}\right)^2 + 2\varphi^2 \right] k, \quad (20.13)$$

где

$$k = \left(\frac{P}{F}\right)^2 \left(\frac{E}{2E}\right)^2 \left(\frac{l}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{P}{F_0}\right). \quad (20.14)$$

Разделив переменные и интегрируя, найдем

$$t = \frac{P}{2kE} \ln \frac{\varphi^2 + 1,5 \left(\frac{b}{l}\right)^2}{1,5 \left(\frac{b}{l}\right)^2} + C. \quad (20.15)$$

Для определения постоянной C нужно воспользоваться начальным условием

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (20.16)$$

*) Конечно, для реальных материалов m может не быть целым числом. Мы ограничились целым для удобства решения; предполагая, что не является, мы должны бы одного из стержней процесс или для сжатия, так и для растяжения.

которое дает

$$C = -\frac{P}{3k^2} \ln \frac{\varphi^2}{2\varphi^2 + 1,5 (b/d)^2} \quad (20.17)$$

Возвращаясь теперь к выражению (20.15), окончательно находим угол φ в функции времени:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1,5 \left(\frac{b}{d}\right)^2 \varphi_0^2 e^{3k^2 C t}}{1,5 \left(\frac{b}{d}\right)^2 + 2\varphi^2 [1 - e^{3k^2 C t}]}} \quad (20.18)$$

Заметим, что с возрастанием времени знаменатель подкоренного выражения постепенно увеличивается и при некотором значении $t_{кр}$ становится равным нулю, т. е. угол отклонения стойки φ стремится к бесконечности. Значение $t_{кр}$ определяет, можно сказать, срок жизни стойки; это значение называют критическим временем.

Из выражения (20.18) можно найти, что критическое время равно

$$t_{кр} = \frac{1}{3} \left(\frac{b}{d}\right)^2 \left(\frac{2k}{E}\right)^2 \left(\frac{d}{P}\right)^2 \ln \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{b}{d}\right)^2 \right] \left(1 - \frac{P}{P_c}\right) \quad (20.19)$$

Очевидно, что при любой заданной силе $P > 0$ в конце концов происходит потеря устойчивости, и поэтому о критической силе здесь говорить трудно; гораздо большей определенностью обладает понятие критического времени.

Для иллюстрации приведем следующие значения постоянных: $E = 5 \cdot 10^6$ атс/см², $k = 17 \cdot 100$ кгс-см⁻¹·с², $b/d = 100$, $a/b = 4$, $\varphi_0 = 2 \cdot 10^{-4}$, $F = 1$ см^{2.}

При этих значениях находим по формуле (17.10) $P_c = 625$ кгс. Показим, что $P = 500$ кгс, т. е. условие $P < P_c$ выполнено.

Теперь по формуле (20.5) вычисляем $\varphi_0 = 10^{-2}$. На рис. 20.3 представлена зависимость $\varphi = \varphi(t)$, вычисленная с помощью выражения (20.18). Критическое время по формуле (20.19) равно $t_{кр} = 28$ с.

Как видно из формулы (20.19), критическое время зависит не только от параметров самой стойки, но и от значения сжимающей силы P , точнее — от отношения P/P_c . На рис. 20.4 изображена зависимость критического времени от значения силы P для условий приведенного выше примера. Если $P = P_c$, то $t_{кр} = 0$ и стойка теряет устойчивость сразу после нагружения.

Любопытно отметить, что при линейной связи скорости установившейся величины с действующим напряжением (т. е. когда в выражении (20.3) $n=1$) потеря устойчивости в изложенном выше смысле невозможна. В самом деле, подставив в дифференциальное уравнение (20.12) $n=1$, получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{EP}{k(P_c - P)} \varphi \quad (20.20)$$

Интегрируя при первом начальном условии (20.16), находим

$$\varphi = \varphi_0 e^{\frac{EP}{k(P_c - P)} t} \quad (20.21)$$

Эта зависимость гораздо сложнее зависимости (20.18),

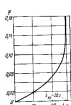


Рис. 20.3. Зависимость угла от времени

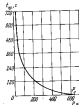


Рис. 20.4. Зависимость критического времени от сжимающей силы

так как хотя угол φ увеличивается с возрастанием скорости, но остается ограниченным при любом конечном t . В этом случае можно условно считать, что потеря устойчивости соответствует моменту, когда скорость возрастания угла φ достигает некоторого заданного значения.

Первые исследования в этой области принадлежат А. Р. Ренкини (см. его статья «Процесс деформирования конструкции из упруго-пластичного материала», Доклады АН СССР, 1946, т. 29, № 11, А. Д. Редсу (см. журнал «The Strait. Eng.» № 8 за 1946 г. и № 3 за 1947 г.), А. М. Фрейденберга (Доклады VI Международной конференции по физике

ной математики, Прага, 1946 г.) и Дж. Марку (журнал «J. Appl. Phys.» № 1 за 1947 г.). С тех пор проводил обширный цикл теоретических и экспериментальных исследований. Их обзор, законченный до 1958 г., был сделан Н. Хейфе (журн. «Периодический сборник переводов иностранных статей «Механика», № 1 (88) за 1958 г.; здесь, в частности, обсуждается двойной парадокс, обнаруженный Ю. Н. Работинским и С. А. Шестериковым (см. их статью «Устойчивость стержня в условиях ползучести», — *Пробл. мат. в мех.*, 1956, № 6).

Настоящее изложение истории устойчивости при ползучести рассмотрено в книге Н. Хейфе «Продольный стержень и устойчивость» (М.: ВП, 1958). См. также статью В. И. Розенблума «Устойчивость свистящего стержня в условиях ползучести» (Изд. сб. Науч. АН СССР, 1954, т. 18) и работу А. Р. Равичинца «Устойчивость при ползучести (об «Проблеме устойчивости в стержневой механике», М.: Стройиздат, 1952, с. 104—118).

Часть вторая

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

ВВЕДЕНИЕ

Теория механических колебаний имеет многочисленныи и весьма разнообразныи приложения едва ли не во всех областях техники. Независимо от назначения и конструктивного облика различных механических систем их колебания подчиняются одним и тем же физическим закономерностям, изучение которых и составляет предмет общей теории.

Наиболее полно разработана линейная теория колебаний. Еще в XVIII веке в «Аналитической механике» Лагранжа она была развита для систем с консервативными степенями свободы. В работах ряда авторов XIX века, особенно Рунге^{*)}, были заложены основы линейной теории колебаний систем с бесконечным числом степеней свободы (т. е. с непрерывным распределением массы по всему объему деформируемой системы). В XX веке линейная теория, можно сказать, была завершена; ныне сложность исследуемых колебательных процессов в линейных системах сводится лишь к правильности отбора существенных степеней свободы и определению величин воздействий, т. е. к подбору расчетной схемы. Некоторые вопросы линейной теории рассматриваются ниже, в гл. VI.

Многие задачи о колебаниях механических систем в зависимости от конкретных соотношений между параметрами допускают как линейную, так и нелинейную постановку. Однако, наоборот, задачи о действиях возмущенной системы, которые возникают уже более ста лет назад при

^{*)} Даже Уильям Струт (барон Рэлей) (1842—1919) — английский физик, автор ряда работ по теории колебаний, акустики, оптики. Член (с 1873 г.) и президент (1905—1908 гг.) Лондонского королевского общества. Награжденный член-корреспондент Петербургской Академии наук (с 1896 г.).

проектировании больших железнодорожных мостов; впоследствии определены также другие области применения той же теории (например, колебания трубопроводов). Сущность этих задач выражена вкратце тем, что мы поставили на отдельную главу (гл. VII); теми же соображениями мы руководствовались при выделении в особую главу (гл. VIII) своеобразных задач биомеханической аниматроники, представляющих большую важность не только для летательных аппаратов, но и для некоторых конструкций ступообразного назначения.

Последняя глава IX посвящена принципиально новым задачам. Многие физические явления, наблюдаемые при колебаниях механических систем, невозможно объяснить, опираясь только на линейную теорию. Поэтому бурно развивающаяся в последнее время нелинейная теория колебаний служит в основном не для того, чтобы найти малые количественные поправки к результатам, получаемым на линейной теории. Роль нелинейной теории гораздо шире — с ее помощью должны быть описаны явления, которые ускользают из поля зрения при всякой попытке линейно решить рассматриваемую задачу.

К сожалению, нелинейные уравнения, как правило, не поддаются решению в замкнутом виде. Поэтому усилия со стороны нелинейной теории, начиная с Пуанкаре^{*)} и Липунцова^{**)}, были направлены на построение рациональных алгоритмов, позволяющих получить приближенные результаты того или иного уровня точности. Некоторые из методов нелинейной теории дают возможность строить последовательные приближения; такими методами Пуанкаре и Липунцова, метод Крылова^{***)} — Боголюбова; другие методы, например, метод ван дер Поля, позволяют получить только первое приближение (если считать, что линейная теория дает нулевое приближение).

^{*)} Ален Пуанкаре (1843—1912) — французский математик, член Парижской Академии наук с 1877 г. Основные работы посвящены нелинейной теории дифференциальных уравнений, математической физике и небесной механике.

^{**)} Александр Михайлович Липунцов (1857—1918) — математик и механик, с 1895 г. — член-корреспондент Петербургской Академии наук; с 1898 г. — академик. Основательница современной теории устойчивости движения, автор ряда работ по математическому анализу и математической физике.

^{***)} Николай Михайлович Крылов (1879—1953) — автор ряда работ по математической физике и механике. С 1922 г. — действительный член АН УССР, с 1928 г. — член-корреспондент АН СССР, с 1929 г. — академик.

Следует отметить особую практическую важность именно первого приближения. Дело в том, что описание всех специфических нелинейных эффектов чаще всего содержится уже в первом приближении; и в то же время объем выкладки, нужных для построения высших приближений, резко возрастает с каждым следующим этапом приближения. Однако есть еще одно принципиальное соображение, которое нередко делает вообще вообще бессмысленной целесообразность построения высших приближений: параметры, входящие в уравнения должны конкретными механическими систем, известны лишь с некоторой ограниченной точностью. Поэтому логично строить приближения лишь до того уровня точности, который соответствует точности задания параметров; во многих нелинейных задачах разумно остановиться уже на первом приближении — построение высших приближений может дать лишь иллюзию повышения точности. В литературе порой можно встретить надобные «существенные» решения конкретных нелинейных задач с довольно грубо определенными исходными значениями параметров; такие решения выглядят, по крайней мере, странно.

В связи со сказанным задачами, рассмотренные в главе IX, решены лишь в первом нелинейном приближении; подобная упрощенная постановка особенно оправдана в книге такого характера, как эта.

Глава III НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В этой главе рассматриваются относительно несложные вопросы теории колебаний линейных механических систем; как и в других главах, при выборе тем в основном из соображений авторы отошли от традиций, господствующих в учебной литературе. Часть параграфа (§ 21—23) посвящена свободным колебаниям; вложение некоторых особых задач о действиях трения дано в § 31—33. В § 34 рассматриваются параметрические колебания линейных систем.

§ 21. Системы с конечным числом степеней свободы

Каждая приближенная теория имеет ограниченную сферу применения, и притом тем меньшую, чем примененные последние молекулярные представления; — об этом посто-

точно говорит на лекциях и пишет в книгах. Иногда такие предупреждения сопровождаются более или менее четкими количественными указаниями (технической теории негиб стержней можно пользоваться при условии, что высота поперечного сечения по крайней мере на порядок меньше длины стержня), а в других случаях носят скорее качественный характер (временную во времени нагрузку можно считать статической, если она достаточно медленно изменяется во времени *).

Но одновременно с этим нужно иметь в виду и другую сторону вопроса. Когда упрощенная теория приводит к какому-либо несоответствию с действительностью, иной исследователь видит в этом свидетельство полной негодности модели и склонен вообще забраковать такую модель. Но это тоже крайность, потому что несоответствие отдельных результатов применения упрощенной модели в принципе неизбежно (должны же в чем-то проявиться приближенности); встретившись с такой ситуацией, не следует торопиться с полным осуждением модели, а нужно спланировать существо обнаруженного конфликта — оценить, какое такое конфликты может иметь локальный характер и не могут опровергнуть модель в целом.

На эти мысли может навести, в частности, обсужденная задача о движении груза, показанного на рис. 21.1. Пусть y — отклонение груза от положения равновесия, ε — коэффициент жесткости пружины, λ — коэффициент вязкого трения, m — масса груза. Тогда дифференциальное уравнение свободного движения, возникающего после начального возмущения состояния равновесия груза, запишется в виде

$$m\ddot{y} + \lambda\dot{y} + \varepsilon y = 0. \quad (21.1)$$

Допустим теперь, что масса груза настолько мала, что ее можно принять равной нулю и рассмотреть безинерционную систему с уравнением

$$\lambda\dot{y} + \varepsilon y = 0. \quad (21.2)$$

Решение этого уравнения

$$y = Ae^{-\frac{\varepsilon}{\lambda}t} \quad (21.3)$$

содержит только одну постоянную A и поэтому не может удовлетворить одновременно двум начальным условиям:

* Этому ограничению можно придать и количественный характер; см. об этом ниже, на с. 207 и далее.

$y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_0$. Если потребовать выполнения первого условия, то получится $A = y_0$ и решение примет вид

$$y = y_0 e^{-\frac{\varepsilon}{\lambda}t}; \quad (21.4)$$

при этом

$$\dot{y} = -\frac{\varepsilon y_0}{\lambda} e^{-\frac{\varepsilon}{\lambda}t}, \quad (21.5)$$

т. е. найденное решение как бы «навязывает» начальной скорости значение

$$\dot{y}(0) = -\frac{\varepsilon y_0}{\lambda}, \quad (21.6)$$

которое может оказаться устроено сильно отличаться от независимо заданного значения v_0 . Впрочем, соотношение (21.6) вытекает также непосредственно из уравнения (21.2).



рис. 21.1. Механическая система с одной степенью свободы

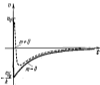


рис. 21.2. Изменение скорости идеальной системы (сплошная линия) и действительной системы (пунктирная линия)

Так с какой же скоростью начнется движение рассматриваемой идеальной системы — со скоростью v_0 или со скоростью $-\varepsilon y_0/\lambda$? Как будет происходить движение системы при $t > 0$? Ответы на эти вопросы даны сплошной линией на рис. 21.2. В начале движения независимо от значения v_0 скорость скачком примет значение $-\varepsilon y_0/\lambda$, далее в выражения (21.3), после чего будет изменяться по показательному закону (21.4).

Для того чтобы понять существо полученного решения, нужно вернуться к полному уравнению (21.1) и рассмотреть его решение при малых, но отличных от нуля значениях

массы m . Это решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_0$, иллюстрировано на том же рис. 21.2 штриховой линией.

Различие между двумя зависимостья ощутимо только в начале движения, когда вместо быстрого изменения скорости системы с $\omega^2 t^2$ получается мгновенное изменение при $\omega = 0$. Конечно, для начального этапа движения безмассовая модель негодна, но она становится приемлемой по сравнению некоторого большого промежутка времени — тем меньше, чем меньше значение массы груза.

Коротко говоря, использование вырожденной модели приводит к некоторому конфликту, но он имеет лишь локальное (по времени) значение. Подобные конфликты, возникающие при анализе вырожденных систем, — вынужденная дань идеализации; Л. И. Мандельштам *) говорил, что идеализация мстит за себя. Подобные несоответствия типа всего носят лишь локальный характер (в пространстве или во времени). Ослепительный вырожденный случай рассмотрен в книге А. А. Андрюнова **, А. А. Витта и С. Э. Хайкина «Теория колебаний», где эта система названа системой с 1/2 степенью свободы. Основанием для такого необычного названия служат те обстоятельства, что дифференциальное уравнение движения имеет первый порядок, тогда как для системы с одной степенью свободы уравнение движения имеет второй порядок.

Рассмотрим теперь системы, изображенные на рис. 21.3, предположим во всех случаях консольный стержень идеально упругим и невращаемым. Система δ имеет 1/2 степени свободы, системы β и ϵ — одну степень свободы. Система ζ имеет две степени свободы. Но сколько степеней свободы имеет система θ ? Для ответа на этот вопрос можно рассуждать эту систему как результат вырождения предыдущей системы, когда одна из масс равна нулю. Поэтому нужно считать, что система θ имеет $n = 0, 1$ или 2 степени свободы.

В отсутствие такого вырождения можно убедиться, рассмотрев дифференциальные уравнения сво-

бодных колебаний. Для их составления удобно пользоваться коэффициентами влияния, называемыми в строительной механике обобщенными перемещениями.

Коэффициентом влияния упругой системы δ_{11} называется перемещение по направлению l , вызванное статической силой $P=1$, действующей по направлению l . Это понятие с успехом используется при расчетах статически неопределимых систем по методу сил и часто применяется при решении динамических задач. Для вычисления коэффициентов влияния в стержневых и стержневых системах особенно удобна формула Мора или ее модификация в виде правила Верещагина.

Обратимся к системе, показанной на рис. 21.3, δ , обозначим через $y_1(t)$ и $y_2(t)$ вертикальные перемещения соответственно точки I (в которой присоединен демпфер) и точки 2 (конец консоли). В этих точках на консоль действует сила тяжести — δy_1 и сила инерции груза — $m\ddot{y}_2$, где k — коэффициент жесткости демфера, m — масса груза. Пользуясь коэффициентами влияния δ_{11} , $\delta_{12} = \delta_{21}$ и δ_{22} , можно записать

$$y_1 = -\delta y_1 \delta_{11} - m \ddot{y}_2 \delta_{12} \quad (21.7)$$

$$y_2 = -\delta y_2 \delta_{21} - m \ddot{y}_2 \delta_{22}$$

Эту систему можно привести к одному уравнению относительно какой-либо из функций y_1 или y_2 . Если, например, исключить из системы перемещение y_1 и его производную, то для перемещения y_2 получится дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\ddot{\ddot{y}}_2 + \frac{\delta_{11}}{k(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)} \ddot{y}_2 + \frac{\delta_{22}}{m(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)} \dot{y}_2 + \frac{1}{m\delta(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)} y_2 = 0 \quad (21.8)$$

Как видно, число степеней свободы рассматриваемой системы естественно считать равным $1/2$, поскольку порядок полученного уравнения в $1/2$ раза больше, чем поряд-



Рис. 21.3. Системы с различным числом степеней свободы

*) Леоид; Константин Мандельштам (1879—1944) — академик с 1929 г.), профессор Московского университета. Известен работами в области оптики, радиотехники и теории колебаний; один из создателей теории квантовых колебаний.

***) Александр Александрович Андрюнов (1860—1925) — с 1920 г. профессор Гатчинского университета, с 1902 г. — академик. Разрабатывал вопросы теории нелинейных колебаний, теории автоматического регулирования.

док дифференциального уравнения для системы с одной степенью свободы.

Мы не будем заниматься решением уравнения (21.8), но отметим, что соответственно его порядку в окончательный результат войдут три постоянных для их определения. Необходимо исходить из трех начальных условий. В этой несколько нестандартной ситуации (кроме обычных условий, относящихся к началу отклонения $y_1(0)$ и начальной скорости $\dot{y}_1(0)$, необходимо указать значение

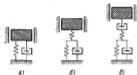


Рис. 21.4. Груз на различных комбинациях опор

начального ускорения $\ddot{y}_1(0)$. Это можно сделать, если рассмотреть сведениями о начальном отклонении $y_1(0)$ точки крепления демфера; тогда из уравнений (21.7) можно получить

$$\ddot{y}_1(0) = \frac{y_1(0)(\delta_{11} - \beta_1(0)\delta_{12})}{m(\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{12}^2)}$$

После этого задача вычисления трех постоянных интегрирования уравнения (21.8) становится полностью определенной. Выясняется, что приведение системы к виду (21.8) не обязательно; можно решить — как это обычно и делается — непосредственно систему (21.7) и выполнить постоянные интегрирования по трем условиям, относящимся к начальным значениям $y_1(0)$, $\dot{y}_1(0)$, и $\ddot{y}_1(0)$.

На рис. 21.4 показаны три системы, каждая из которых включает один груз, который может поступательно перемещаться по вертикали, в опоры, состоящую из комбинации упругих и вязких элементов. Подробный анализ каждого из случаев приводит к следующим числам степеней свободы: схема а — 1, схема б — 1/2, схема в — 2.

Отметим в заключение, что разнообразие комбинации упругих и вязких элементов (иногда также пластичных элементов) служит для наглядной иллюстрации свойств

различных реальных деформируемых тел и иллюстрирует механическими моделями.

Книга А. А. Андреева, А. А. Витта и С. В. Хайкина «Теория колебаний» (2-е изд. — М.: Физматгиз, 1989) в основном посвящена нелинейным колебаниям. О релаксационных моделях см., например, книгу М. Рейнера «Релаксация» (М.: Наука, 1966). Опоры, показанные на рис. 21.4, можно рассматривать как релаксационные модели, известные под следующими наименованиями: а — модель Кольмана — Фойла, б — стандартная линейная вязкоупругая модель, в — модель Бургера.

§ 22. Свободные колебания консоли в поле центробежной силы

Рассмотрим задачу о свободных изгибных колебаниях упругой консоли, изображенной на рис. 22.1, когда жесткая заделка равномерно вращается в плоскости чертежа; такая система представляет собой предельно (а может быть,



презервно) упрощенную схему турбинной лопатки. При вращении системы развивается центробежная сила, которая

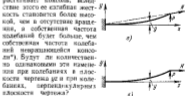


Рис. 22.2. Две несвязанные схемы поперечных деформаций упругого стержня

Этот вопрос и является темой настоящего параграфа: для ответа необходимо решение двух вспомогательных статических задач, схемы которых представлены на рис. 22.2.

* Для собственных частот неразрезываемой турбинной лопатки иногда получают бесконечно малые значения частоты статического изгиба.

В обоих случаях поперечная изгиб, вызываемый силой P , осложнен сопротивляющимся действием продольной силы N . Но в случае a сила N попеременноется при изгибе и ее линия действия проходит через начальное сечение консоли, а в случае b сила N имеет неизменное направление. Найдем значения эффективного коэффициента жесткости c для обоих случаев:

$$c = \frac{P}{l}, \quad (22.1)$$

где l — прогиб конца консоли.

Примем решение обеих задач, зависящая параллельно соответствующим выкладкам для каждого из случаев.

Изгибающий момент в произвольном сечении:

$$a) M = \left(P + N \frac{l}{l} \right) (l-x) - N (l-y); \quad (22.2)$$

$$b) M = P (l-x) - N (l-y), \quad (22.3)$$

где y — прогиб произвольного сечения консоли. Дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$a) y'' - \alpha^2 y = \frac{kl + \beta}{EI} (l-x) - \alpha^2 l; \quad (22.4)$$

$$b) y'' - \alpha^2 y = \frac{P}{EI} (l-x) - \alpha^2 l; \quad (22.5)$$

Здесь

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}. \quad (22.6)$$

Общее решение дифференциального уравнения:

$$a) y = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x - \left(\frac{P}{N} + \frac{l}{l} \right) (l-x) + l; \quad (22.7)$$

$$b) y = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x - \frac{P}{N} (l-x) + l. \quad (22.8)$$

Граничные условия:

$$a) \text{ и } b) \quad y = 0, \quad y' = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (22.9)$$

Выражения для постоянных интегрирования:

$$a) C_1 = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{l}{l} + \frac{P}{N} \right), \quad C_2 = \frac{Pl}{N}; \quad (22.10)$$

$$b) C_1 = -\frac{P}{\alpha N}, \quad C_2 = \frac{Pl}{N} - l. \quad (22.11)$$

Уравнение изогнутой оси:

$$a) y = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{l}{l} + \frac{P}{N} \right) \operatorname{sh} \alpha x + \frac{Pl}{N} \operatorname{ch} \alpha x - \left(\frac{P}{N} + \frac{l}{l} \right) (l-x) + l; \quad (22.12)$$

$$b) y = -\frac{P}{\alpha N} \operatorname{sh} \alpha x + \left(\frac{Pl}{N} - l \right) \operatorname{ch} \alpha x - \frac{P}{N} (l-x) + l. \quad (22.13)$$

Подставляя сюда $x=l$ и $y=l$, находим

$$a) l = \frac{Pl}{EI} \frac{\operatorname{sh} \alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l}{\operatorname{sh}^2 \alpha l}; \quad (22.14)$$

$$b) l = \frac{Pl}{EI} \frac{\operatorname{sh} \alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l}{\operatorname{sh}^2 \alpha l}. \quad (22.15)$$

Можно проверить, что при отсутствии продольной силы ($\alpha=0$) в обоих случаях после предельного периода получим известный результат $l = \frac{Pl}{2EJ}$. Соответственно (22.1) находим из выражений (22.14) и (22.15) коэффициент жесткости:

$$a) c = \frac{(\alpha l)^2 \operatorname{sh} \alpha l}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l} c_0; \quad (22.16)$$

$$b) c = \frac{(\alpha l)^2 \operatorname{ch} \alpha l}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l} c_0. \quad (22.17)$$

где

$$c_0 = \frac{3EJ}{l^3} \quad (22.18)$$

— коэффициент жесткости при $N=0$ (и соответственно при $\alpha=0$).

На рис. 22.3 представлены отношения c/c_0 в зависимости от безразмерного произведения αl . Из графиков видно, что коэффициенты жесткости могут существенно различаться, а, следовательно, рассматриваемые случаи следует учитывать.

Теперь мы можем вернуться к вопросу об изгибах колеблющихся консоли. Если эти колебания происходят в плоскости вращения, то поперечная сила инерции направлена так, как это представлено на рис. 22.2, а; если же колебания происходят во плоскости вращения, то направление этой силы соответствует рис. 22.2, б. В обоих случаях

$$N = m \dot{\omega}^2 l, \quad (22.19)$$

где m — масса груза, ω — угловая скорость, так что в формулы (22.17), (22.16) следует подставлять

$$\omega l = \omega l \sqrt{\frac{\omega l}{g}}. \quad (22.20)$$

Конечно, значение гибкой жесткости EJ должно приниматься соответственно тому или иному направлению наклона.

После того как вычислен коэффициент жесткости, собственная частота *) определяется по простой формуле:

$$p = \sqrt{c/m}. \quad (22.21)$$

Иногда в литературе также отмечается влияние кориолисовой силы инерции, возникающей при колебаниях в

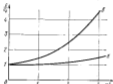


Рис. 22.3. Зависимость коэффициента гибкой жесткости от безразмерного параметра α/l

плоскости вращения. Показано, что учет этого влияния практического смысла не имеет.

Линия действия этой силы лежит в плоскости вращения системы и перпендикулярна вектору относительной скорости груза, т. е. параллельна оси Z кориолисовой силы инерции циклически меняется по модулю и направлению. Наибольшее значение кориолисовой силы инерции достигается в момент прохождения грузом его среднего положения:

$$J_p = 2m\omega v_{\text{max}}. \quad (22.22)$$

где v_{max} — относительная скорость груза в указанный момент. При свободных колебаниях с частотой p и амплитудой a

$$v_{\text{max}} = ap. \quad (22.23)$$

*) Здесь и ниже все частоты обозначаются числом колебаний в 2 π единиц времени (циклическими частотами).

Таким образом,

$$J_p = 2maap. \quad (22.24)$$

Величины p и a обычно одного порядка, поэтому, сравнивая выражения (22.24) и (22.19), можно заключить, что отношение J_p/N имеет порядок отношения $2a/l$, т. е. весьма мало.

Об учете кориолисовой силы инерции при колебаниях приведены в справочн. кн. книги А. П. Федосеева «Калибровка измерительной системы» (Киев: Наукова думка, 1963).

§ 23. Равночастотные системы

Собственные частоты механических систем определяются их общей структурой и значениями параметров. Однако существует несколько необычных систем, частоты которых не зависят от количественных значений некоторых параметров. — казалось бы, весьма важных. Иногда такие системы создаются специально, чтобы при возможных на практике изменениях того или иного параметра частоты оставались неизменными. В других случаях независимость собственных частот от параметров системы обнаруживается как неожиданное следствие ее особых свойств.

Ниже рассмотрены оба случая.

Одним из средств борьбы с колебаниями оборудования служит виброизоляция, т. е. жесткое крепление его подвеска, при которой высокочастотные вибрации основания практически не передаются на оборудование. Для успеха этой меры стремятся к тому, чтобы отношение частот возбуждения к собственной частоте колебаний было возможно большим. Кроме того, желательно, чтобы это отношение было одинаковым для всех объектов виброизоляции, т. е. чтобы одинаковыми были собственные частоты p . Но собственная частота p системы с одной степенью свободы зависит от массы тела m и коэффициента жесткости упругой связи c :

$$p = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (23.1)$$

и, следовательно, для разных значений масс m требуются и различные значения коэффициента жесткости c . Может показаться, что для каждого значения массы нужен свой особый вибродемпфер.

Однако это не так. Сорок лет назад Ю. И. Норин предложил и разработал идею равночастотных вибродемпферов, т. е. таких упругих элементов, жесткость которых меняется в зависимости от веса амортизируемого объекта. Равно-

частотный виброзолотатор с равным успехом выполняет свою роль независимо от веса подвешиваемого груза (в достаточно широких пределах). Это упрощает стандартизацию и позволяет резко сократить конструкцию выпускаемых типов виброзолотаторов. С их помощью можно добиться неизменности собственной частоты колебаний железнодорожного вагона или автомобиля при изменении загрузки кузова, а также одинаковых собственных частот различных станков, устанавливаемых на одинаковых упругих опорах, и т. д.

Основная особенность системы равночастотной виброизоляции — ее неизменяемость, в противоясность специального вида. Предположим, что связь между статической нагрузкой и перемещением имеет вид, показанный на

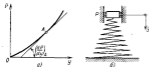


рис. 23.1. а) Неизменная упругая характеристика, б) неизменная нагрузка груза

рис. 23.1, а (нелинейная характеристика). Точка А на кривой соответствует нагружению упругого элемента статической нагрузкой P_A .

Подобными неизменяемыми характеристиками обладают, например, амплитудные пружины с пассивной вилкой на основании (рис. 23.1, б). При колебаниях груза около статического уровня сила упругости пружины будет следовать кривой $P(y)$; однако если эти колебания достаточно малы, то участок кривой, расположенный вблизи точки А, можно заменить касательной. С помощью такой замены мы получаем линейную колебательную систему, жесткость которой определяется выражением

$$c = \left(\frac{dP}{dy} \right)_A, \quad (23.2)$$

а частота — обычной формулой

$$\rho = \sqrt{\frac{G(P'(y))_A}{P_A}}, \quad (23.3)$$

Отсюда видно, что постоянство частоты ρ , т. е. неизменяемость от нагрузки P , будет обеспечено, если всем точкам кривой $P(y)$ соответствует неизменное значение отношения $\frac{dP}{dy}$.

Пусть ρ — выбранное фиксированное значение собственной частоты. Тогда из (23.3), опуская индексы, получим следующее дифференциальное уравнение для характеристики $P=P(y)$:

$$\frac{d^2 P dy}{P} = \frac{c^2}{g}. \quad (23.4)$$

Решение уравнения (23.4) имеет вид

$$\frac{dP}{P} \ln P = y + C. \quad (23.5)$$

Отсюда непосредственно видно, что интегральные кривые уравнения (23.4) одинаковы по форме; любая из них может быть получена в результате поступательного сдвига любой другой интегральной кривой в направлении оси y , как это изображено на рис. 23.2. Любая из этих характеристик удовлетворяет уравнению (23.4), но для определенности решения нужно найти постоянную C и тем самым зафиксировать ось конкретной интегральной кривой — некоторую статическую характеристику виброизолатора.

На первый взгляд, для этой оси непосредственно может быть использовано начальное условие:

$$y = 0 \text{ при } P = 0, \quad (23.6)$$



рис. 23.2. Интегральные кривые уравнения (23.4)

так как статическая характеристика должна проходить через начало координат. Однако без этого не обойтись, что по сути является бесконечным множеством интегральных кривых (23.5) через начало координат не проходит и, следовательно, не может быть принята за характеристику.

Ю. Н. Норин предложил следующий выход из этого затруднительного положения. Пусть P_0 — минимальный вес виброизолаторного груза, определяемый техническими требованиями. В таком случае при $P \leq P_0$ виброизолатор может иметь характеристику, не удовлетворяющую основному

уравнению (23.4), а частота наиболее простую — линейную характеристику

$$P = c_0 y. \quad (23.7)$$

При этом естественно стремиться к плавному переходу от линейного участка к нелинейному. Таким образом, вид бор исконной интегральной кривой подчинен простому геометрическому условию:

$$\frac{d^2 P}{dy^2} = \frac{P}{y} \quad \text{при} \quad P = P_0. \quad (23.8)$$

Согласно (23.5) имеем

$$P = P_0' y + C_1 y^2, \quad (23.9)$$

тогда условие (23.8) принимает вид

$$P_0' \frac{P_0'}{y} = \frac{P_0'}{y_0}, \quad (23.10)$$

т. е.

$$y_0 = \frac{C_1}{P_0'}. \quad (23.11)$$

где y_0 — абсцисса точки, общей для линейного и нелинейного участка характеристики; эта величина определяется заданной частотой P_0 .

Следовательно, чтобы найти постоянную C_1 , мы должны воспользоваться не условием (23.6), а условием

$$P = P_0 \quad \text{при} \quad y = \frac{C_1}{P_0'}. \quad (23.12)$$

Тогда из (23.5) найдем

$$P = P_0 \frac{y^2}{y_0^2} - 1, \quad (23.13)$$

причем эта кривая начинается в точке с координатами $y = y_0/P_0'$, $P = P_0$; от этой точки в начале координат проводится прямая, уравнение которой (23.7) имеет вид

$$P = P_0' \frac{y}{y_0}. \quad (23.14)$$

На рис. 23.3 изображена вся характеристика, составленная из двух частей (23.13) и (23.14). Теперь возникает задача расчета и построения такой кривой, которая обладает только что описанной характеристикой. Эта сама по себе любопытная задача выходит за пределы нашей темы.

Покажу, еще более интересными свойствами обладает равночастотная система, подробно изученная в 1956 г. С. А. Владимировым и А. В. Стежко. Эта, показанная на рис. 23.4 система представляет собой однородную весьма длинную консоль, настолько гибкую, что под действием собственного веса часть балки лежит на жесткой горизонтальной плоскости. Если рассмотреть малые свободные колебания балки около указанного на рисунке равновесного состояния, то окажется, что частота колебаний совершенно не зависит от гибкости жесткости и интенсивности распределенной массы m , а определяется только размером l_0 .

Этот неожиданный результат можно было бы отчасти понять, если бы учесть, например, какое влияние оказывает увеличение гибкости EJ . С одной стороны, из-за этого частота должна возрасти, но, с другой стороны, по той же причине несколько увеличится длина l_0 криволинейного участка балки, что должно вызвать некоторое уменьшение частоты. Может быть, противоположные влияния взаимно



Рис. 23.3. Характеристика равночастотного виброконцентратора



Рис. 23.4. Длинная гибкая консоль, ее часть лежит на жесткой горизонтальной плоскости

компенсируются? Для того чтобы выяснить этот вопрос, обратимся к выкладкам и найдем с определенной равновесной формой ось балки.

Примем ось координат согласно рис. 23.4 и обозначим через $\omega(x)$ статический прогиб, запишем дифференциальное уравнение изгиба, справедливое при больших значениях ω/l_0 , для всего криволинейного участка $0, l_0$:

$$EJ \omega'' = m g y.$$

Решение этого уравнения должно быть подчинено этим граничным условиям:

$$\begin{aligned} v_0(0) = 0, & \quad v_0'(0) = 0, \\ v_0(l_0) = h, & \quad v_0'(l_0) = 0, \quad v''(l_0) = 0, \end{aligned}$$

из которых можно найти четыре постоянные интегрирования в виде одной неизвестной величины — длины криволинейного участка l_0 .

Нужно признать некоторую необходимость снятия двух последних условий; ведь в обычных случаях балочная закрепленность, если $v_0' = 0$ (заделка), то $v_0'' \neq 0$, а если $v_0'' = 0$ (свободный конец или шарнирный опора), то $v_0' \neq 0$. Тем не менее в рассматриваемом нестандартном случае плановое сопряжение криволинейного участка с прямолинейным означает, что $v_0' = 0$ и $v_0'' = 0$ одновременно. Здесь полезно также отметить, что условие $v_0'' = 0$ в данном случае было бы необходимо, так как нигде и не следует, что при $z = l_0$ поперечная сила равна нулю, — жесткое основание может создавать не только распределенную реакцию, равную интенсивности собственного веса (при $z > l_0$), но и сосредоточенную реакцию при $z = l_0$ (именно так обстоит дело в рассматриваемом случае).

После простых выкладок находим

$$v_0 = \frac{mg^2}{16T} \left(\frac{z^2}{4g} - \frac{z^3}{8g} + \frac{z^4}{8g} \right),$$

примем

$$l_0 = \sqrt{\frac{128T/h}{mg}}. \quad (23.15)$$

Теперь перейдем к задаче о малых свободных колебаниях около заданного равновесного состояния. Обозначим через $v(z, t)$ отклонение произвольной точки оси балки от соответствующего статического положения и запишем дифференциальное уравнение свободных колебаний в общем виде:

$$EJ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Положим здесь

$$v(z, t) = V(z) \sin(\rho t + \alpha)$$

($V(z)$ — собственная форма, ρ — некое собственная частота, α — начальная фаза), приходим к обыкновенному

дифференциальному уравнению:

$$V'' + \alpha^2 V = 0 \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{E\rho^2}{2T}} \right),$$

решение которого имеет вид

$$V = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + C_3 \operatorname{sh} \alpha z + C_4 \operatorname{ch} \alpha z. \quad (23.16)$$

На левом конце балки должно быть $v(0, t) = 0$ и

$$\frac{\partial v}{\partial z}(0, t) = 0, \quad \text{т. е. } V(0) = 0 \text{ и } V'(0) = 0.$$

Граничные условия на правом конце криволинейного участка балки вытекают в более подробном обсуждении, так как координата этого конца l изменяется в процессе колебаний. Полное перемещение на этом подвижном конце равно h :

$$v_0(l) + v(z, t) = h.$$

Считая разность $\Delta l = l - l_0$ малой, можно записать

$$v_0(l_0) + v(l_0, t) + \left[v_0'(l_0) + \frac{\partial v}{\partial z}(l_0, t) \right] \Delta l = h.$$

Поскольку $v_0(l_0) = h$, $v_0'(l_0) = 0$, то

$$v(l_0, t) + \frac{\partial v}{\partial z}(l_0, t) \Delta l = 0.$$

Второе слагаемое представляет собой величину второго порядка малости; отбрасывая его, приходим к условию $v(l_0, t) = 0$, т. е.

$$V(l_0) = 0.$$

Аналогично для первой производной имеем при $z = l$

$$v_0'(l) + \frac{\partial v}{\partial z}(l, t) = 0,$$

или

$$v_0'(l) + \frac{\partial v}{\partial z}(l_0, t) + \left[v_0''(l) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(l_0, t) \right] \Delta l = 0.$$

Используя условие $v_0''(l_0) = 0$ и $v_0'(l_0) = 0$, получим

$$\frac{\partial v}{\partial z}(l_0, t) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(l_0, t) \Delta l = 0.$$

Следовательно, в точности до величин второго порядка малости $\frac{\partial v}{\partial z}(l_0, t) = 0$, т. е.

$$V'(l_0) = 0.$$

Коротко говоря, при решении динамической задачи граничные условия нужно принимать такими же, как и для балки с двумя зафиксированными концами. Конечно, это можно было «предусмотреть», но предусматривая порой «обманывает»...

Что можно сказать, например, относительно второй производной $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(l_0, t)$? Не кажется ли читателю, что она тоже равна нулю (как это было установлено для второй производной в статической задаче)? Если это так, то должно быть принято $V'(l_0) = 0$. Верно ли это?

Запишем для второй производной при $x=l$

$$\psi_0(l_0) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(l_0, t) = 0$$

и представим полученное соотношение в виде

$$\psi_0(l_0) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(l_0, t) + \left[\psi''(l_0) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(l_0, t) \right] \Delta t = 0.$$

Подставляя сюда $\psi_0(l_0) = 0$ и опуская величину $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(l_0, t) \Delta t$ как малую второго порядка, найдем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(l_0, t) + \psi''(l_0) \Delta t = 0.$$

Но, как мы уже писали выше, третья производная $\psi'''(l_0)$ в статической задаче не была. Следовательно, производная $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(l_0, t)$ оказывается величиной первого порядка малости и полагать ее равной нулю нельзя.

Итак, решение (23.16) должно удовлетворять четырем граничным условиям:

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \quad V(l_0) = 0, \quad V'(l_0) = 0,$$

которые известным образом приводит к частотному уравнению

$$\cos \alpha l, \operatorname{ch} \alpha l_0 = 1.$$

Отсюда можно найти все собственные частоты. Так, наименьший корень $\alpha l_0 = 4,73$ приводит к значению наимей собственной частоты

$$\rho_1 = \left(\frac{4,73}{l_0} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Она существенно зависит от размера l_0 . Если сюда подставить найденное выше значение (23.15), то получится

$$\rho = 2,64 \sqrt{\frac{E}{m}}.$$

т. е. собственная частота не зависит от жесткости EI и от массы балки m .

В заключение отметим еще одно любопытное свойство рассмотренной балки: если на ее левом конце вместо жесткого закрепления поместить шарнирную опору, то собственные частоты не уменьшатся, а наоборот: для меньшей собственной частоты получим $3,16 \sqrt{EI/m}$, т. е. на 20% больше, чем в предыдущем случае. Снятие связи приводит в данном случае к увеличению собственной частоты.

Все описанные выше особенности равночастотных систем связаны, в конце концов, с тем, что равновесное положение этих систем определяется не решением статической балки и ей в 0 задаче, а колебания около этого положения описываются линеаризованными уравнениями.

Подробнее о равночастотных небрежущихся см. в книге Ю. В. Юрков «Вибрации» (М.: Машгиз, 1962).

Изложение выше решенной задачи в языке элементарных функций балкой привел С. А. Владимиров в А. В. Стекло — см. его статья в журнале «Применение математики» (1968, т. IV, вып. 6), где рассмотрен также в целом общий элементарный метод (лучше назвать «элементар»). См. также по работам: «Осциллирующая балка при жесткой опорной связи является в теории осциллирующей балки» (Гидротехнический журнал «Гидротехника», Издательство Ленинградского государственного университета, 1971, с. 147—153), «Линейризованная теория осциллирующей системы с жесткой опорной связью» («Сборник научных материалов к теории осциллирующей балки» Буденко, 1972, вып. 13, с. 197). Кратко та же задача описана в последнем издании книги В. И. Фохталева «Напряжения и деформации упругих материалов» (М.: Наука, 1973, глава 19).

§ 24. Замечания о формулах Рэлея и Грэнвилла

Формула, носившая имя Рэлея, относится к числу наиболее популярных в теории колебаний и устойчивости упругих систем. Ниже пойдет речь о некоторых особенностях этой формулы, а также о случаях ее ошибочного или неудачного использования. В конце параграфа будет обозначена относительно более новая формула Грэнвилла.

Идея, лежащая в основе вывода формулы Рэлея, сводится к следующему. При гармоническом (или почтигармоническом) свободном колебании упругой системы с час-

того p перемещения от точки вынуждено во времени синфазно по гармоническому закону:

$$\begin{aligned} \xi &= f_1(x, y, z) \sin pt, \\ \eta &= f_2(x, y, z) \sin pt, \\ \zeta &= f_3(x, y, z) \sin pt, \end{aligned} \quad (24.1)$$

где $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ — функции пространственных координат точек, определяющие рассматриваемую форму колебаний. Если эти функции (собственные формы) известны, то частоту p свободных колебаний можно найти из условия постоянства суммы кинетической энергии тела и его потенциальной энергии. Это условие приводит к уравнению, содержащему лишь одну неизвестную величину p .

Однако указанные функции заранее неизвестны; руководящая идея метода Рэлея состоит в том, чтобы задаваться этими функциями, выбирая из выбора с граничными условиями и с определенной формой колебаний.

Подробно рассмотрим реализацию этой идеи для плоских изгибных колебаний стержня; в этом случае форма колебаний определяется одной функцией $f = f(z)$ (где z — координата произвольного сечения стержня). Свободные колебания описываются зависимостью

$$\zeta(x, t) = f(z) \sin pt, \quad (24.2)$$

соответственно которой потенциальная энергия изогнутого стержня составляет

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right)^2 dz, \quad (24.3)$$

и кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 dz. \quad (24.4)$$

здесь l — длина стержня, $m = m(z)$ — непрерывность распределенной массы стержня.

Напомним, что величина $\partial^2 \zeta / \partial z^2$ представляет собой кривизну изогнутой оси, а $\partial \zeta / \partial t$ — скорость при поперечных колебаниях; согласно (24.2) для этих величин можно записать

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = f'' \sin pt, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = pf \cos pt. \quad (24.5)$$

Подставляя (24.5) в выражения (24.3) и (24.4), находим

$$W = \frac{1}{2} \sin^2 pt \int_0^l EJ (f'')^2 dz, \quad (24.6)$$

$$T = \frac{p^2}{2} \cos^2 pt \int_0^l m f^2 dz. \quad (24.7)$$

С течением времени каждая из этих величин непрерывно меняется, но, согласно закону сохранения энергии, их сумма остается постоянной, т. е.

$$\frac{d(W+T)}{dt} = 0. \quad (24.8)$$

Если подставить сюда выражения (24.6) и (24.7), то мы приходим к равенству

$$\int_0^l EJ (f'')^2 dz = p^2 \int_0^l m f^2 dz, \quad (24.9)$$

левая часть которого представляет собой наибольшую потенциальную энергию, а правая — наибольшую кинетическую энергию. Отсюда следует формула Рэлея, определяющая частоту изгибных колебаний стержня:

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ (f'')^2 dz}{\int_0^l m f^2 dz}. \quad (24.10)$$

Если со стержнем, обладающим распределенной массой m , связаны сосредоточенные грузы с массами M_n , то формула (24.10) приобретает вид

$$p_n = \frac{\int_0^l EJ (f'')^2 dz}{\int_0^l m f^2 dz + \sum M_n f^2}. \quad (24.11)$$

Коснемся трех вопросов, связанных с формулой Рэлея.
1. Как относиться к этой формуле — считать ее точной или приближенной?

Мы проследили весь ход вывода и можем сказать, что в рамках принятой допущений (справедливость теоремы изгиба стержней, отсутствие внутренних опорных моментов) эта формула точна и в, если $f(x)$ — истинная форма колебаний. Однако, к сожалению, функция $f(x)$ заранее неизвестна. Чтобы можно ее найти, нужно решить дифференциальное уравнение задачи; но при этом зачастую приходится одновременно определяться с величиной p *, так что формула Рэлея становится ненужной.

Практическое значение формулы Рэлея состоит в том, что с ее помощью можно найти собственную частоту p , а в а в а в с формулой колебаний $f(x)$; при этом и решение зависит более или менее серьезный элемент приближенности. По этой причине формулу Рэлея иногда называют приближенной, хотя приближенность (правда, всегда неизбежная), в сущности, связана не с самой формулой, а с приемами ее реализации.

2. Рэлею принадлежит не только вывод формулы (24.11), но и действительно очень важной теоремы: при любом выборе формы колебаний $f(x)$, удовлетворяющей аниматическим граничным условиям задачи, формула (24.10) (или (24.11)) дает значение основной частоты всегда более высокое, чем ее истинное значение.

В 1909 г. в книге С. А. Бернштейна «Основы динамики сооружений» в связи с обсуждением формулы Рэлея совершенно справедливо отмечалось, что частота, вычисленная для формы изгиба, отличающейся от истинной, будет всегда выше истинной частоты. К этому поводу утвердившись автор пришел путем разумных, хотя чисто качественных соображений, не опираясь на теорему Рэлея.

Прошло два года, и С. А. Бернштейну показалось, что приведенная выше формула неверна. Во втором издании той же книги он, отказавшись от прежнего утверждения, пишет: «Приближенное вычисление частоты по методу Рэлея может давать как преуменьшение, так и преувеличенное значение частоты в зависимости от выбранной формы изгиба». На эту ошибку позаный автор натолкнул следующий приведенный им пример.

Рассматривается задача о свободных поперечных колебаниях шарнирно опертый стержень. Форма колебаний $f(x)$ принимается в виде двух отрезков прямых, образующих треугольник с осью балки (рис. 24.1). Далее автор пишет, что поскольку в этом случае $f''=0$, то числитель в формуле

(24.10) обращается в нуль и, следовательно, $p=0$. Этим как будто доказано, что формула (24.10) может давать значение меньше, чем истинное. После этого читатель: «Хотя в разобранном примере перекрестки очевидны (нарушение плавности изнутой линии), но достаточно было бы предположить конечную длину закругления, чтобы восстановить эту плавность, не изменяя результата вычислений. Здесь имеется в виду форма изгиба, изображенная на рис. 24.1, в. Жаль, что С. А. Бернштейн попался первому заключению и не продолжил соответствующие рассуждения».

Пусть два приближенных участка оси составляют углу φ с горизонтом и соединяются дугой окружности радиуса ρ . Длина этой дуги равна $s=\rho\varphi$ (рис. 24.1, б), где ρ — радиус кривизны среднего участка. Тогда числитель выражения (24.10) становится равным

$$\int_0^l EJ (f'')^2 dx = \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{EJ}{\rho^2} dx + \int_{\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} EJ \frac{\varphi}{\rho} dx + \int_{\frac{s}{2}}^l EJ (f'')^2 dx.$$

Устремим в нулю длину и кривизну участка, считая, конечно, угол φ неизменным. При этом радиус кривизны также будет стремиться к нулю, а числитель в выражении (24.10) — к бесконечности. Таким образом, намеченной на



Рис. 24.1. Форма колебаний в виде двух отрезков прямых: а) без плавного перехода; б) с плавным переходом

рис. 24.1, б форме колебаний соответствует не нулевое, а бесконечно большое значение числителя (24.10). Так как знаменатель в формуле Рэлея при увеличении величины ρ остается конечным, то по формуле (24.10) получим частоту, равную не нулю, а бесконечности; этот результат, конечно, не имеет никакой ценности, но вовсе не противоречит теореме Рэлея.

3. Если распространить прием использованный формулой (24.10), обеспечивающий удовлетворение функции $f(x)$ аниматическим граничным условиям. Для этого задаются

* Точнее, радиус кривизны ρ , образующих ступицу собственных частот.

не функцией $f(z)$, а некоторой фиктивной нагрузкой $q(z)$; крайний изгиб, вызываемый этой нагрузкой, и подставляется в формулу (24.10). При таком подходе граничные условия будут выполнены автоматически.

Достоинство этого приема состоит, кроме того, и в том, что вычисление наибольшей потенциальной энергии по формуле

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (f'')^2 dz \quad (24.12)$$

можно заменить более простым вычислением работы

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l qf dz, \quad (24.13)$$

так как величины Π и A равны друг другу. При этом формула Рэлея (24.11) записывается так:

$$\rho^2 = \frac{\int_0^l qf dz}{\int_0^l m f^2 dz + \sum M_i f_i^2} \quad (24.14)$$

Если заданная фиктивная нагрузка содержит также сосредоточенные силы P_i , то формула (24.14) принимает вид

$$\rho^2 = \frac{\int_0^l qf dz + \sum P_i f_i}{\int_0^l m f^2 dz + \sum M_i f_i^2} \quad (24.15)$$

Следует иметь в виду, что величины M_i и P_i , вообще говоря, не связаны между собой; первые представляют собой массы фактически сосредоточенных грузов, а вторые — силы, входящие в состав пригрузки и в статической нагрузке. Точно так же не связаны между собой функции $m(z)$ и $q(z)$.

Впрочем, часто в качестве нагрузки принимаем действительную нагрузку от веса стержня

$$q(z) = m(z)g. \quad (24.16)$$

Это соответствует предположению о том, что форма колебаний совпадает с формой статического изгиба, вызываемого

собственным весом стержня. Если сосредоточенные массы на балке отсутствуют, то формула (24.14) записывается в виде

$$\rho^2 = g \frac{\int_0^l m f dz}{\int_0^l m f^2 dz} \quad (24.17)$$

При пользовании этой формулой функцию $f(z)$ уже не выбирают, она представляет собой вполне определенную кривую статического изгиба.

Последняя редакция формулы Рэлея наиболее проста и обладает полной определенностью. Но в то же время она принципиально отличается от формулы (24.10): крайний изгиб от рассредоточенных сил тяжести не совпадает с истинной кривой изгиба при колебаниях; поэтому формула (24.17) ни когда не может дать точного значения частоты ρ .

Если статическая нагрузка содержит также сосредоточенные грузы с массами M_i , то вместо формулы (24.17) получится

$$\rho^2 = g \frac{\int_0^l m f dz + \sum M_i f_i}{\int_0^l m f^2 dz + \sum M_i f_i^2} \quad (24.18)$$

Эта формула, как и формула (24.17), дает всегда неточный результат.

В одном справочнике формула Рэлея дана в виде

$$\rho^2 = g \frac{\int_0^l EJ (f'')^2 dz + g \sum M_i f_i}{\int_0^l m f^2 dz + \sum M_i f_i^2} \quad (24.19)$$

Эта формула вообще необоснована. Так, например, если подставить в нее истинную функцию $f(z)$, то взамен лишнего слагаемого в числителе получится неверный результат (см. для сравнения формулу (24.11)).

Обратимся теперь к формуле Грэмеля. Эта формула обладает серьезными достоинствами, но до сих пор еще недостаточно популярна в технической литературе (возможно,

следствие своей относительной ошибочности — она была предложена в 1939 г.).

Снова остановимся на той же задаче о свободных изгибных колебаниях, но прежде всего попросим читателя сразу взглянуть на окончательный результат (24.24). По сравнению вышесказанно эта формула выглядит странно. Может даже показаться, что в нее вкляла ошибка: числитель и знаменатель как будто перепутаны местами (сравните формулу Грэнвилла с основной формулой Рэлея или любым из ее вариантов). На самом же деле эта странная конструкция вполне обоснована, как это можно видеть из следующего простого вывода.

Пусть $f(z)$ — заданная форма свободных колебаний стержня. Тогда зависимость максимальных сил инерции определяется выражением $m\ddot{w}^2$, где по-прежнему $m = \rho A dz$ — инерционность распределенной массы, ρ^2 — квадрат собственной частоты колебаний. Эта сила достижает указанного значения в тот момент времени, когда прогибы максимальны, т. е. определяется функцией $f(z)$.

Запишем выражение наибольшей потенциальной энергии изгиба через колебательные моменты, вызываемые максимальными силами инерции:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_{\max}^2 dz}{EI}. \quad (24.20)$$

Здесь EI — жесткость при изгибе, $M_{\max} = M_{\max}(z)$ — изгибающие моменты, вызываемые нагрузкой $m\ddot{w}^2$. Обозначим через \bar{M}_{\max} изгибающий момент, вызываемый условной нагрузкой w^2 , т. е. нагрузкой, в ρ^2 раз меньшей, чем силы инерции; тогда

$$M_{\max} = \rho^2 \bar{M}_{\max} \quad (24.21)$$

и выражение (24.20) можно записать в виде

$$P_{\max} = \frac{\rho^4}{2} \int_0^l \frac{\bar{M}_{\max}^2 dz}{EI}. \quad (24.22)$$

Наибольшая кинетическая энергия, которой обладает система при прохождении положения равновесия, как и выше, определяется выражением

$$T_{\max} = \frac{\rho^2}{2} \int_0^l w^2 dz. \quad (24.23)$$

Приравняв выражения (24.22) и (24.23), приходим к формуле Грэнвилла:

$$\rho^2 = \frac{\int_0^l w^2 dz}{\int_0^l \frac{\bar{M}_{\max}^2 dz}{EI}}. \quad (24.24)$$

Для вычисления по этой формуле необходимо прежде всего задаться подходящей функцией $f(z)$. После этого путем умножения функции $f(z)$ на $w(z)$ определяется условная нагрузка w^2 , и затем известными методами сопротивления материалов находится эквивалентные условные изгибающие моменты \bar{M}_{\max} . Теперь остается вычислить выражения, входящие в числитель и знаменатель формулы (24.24).

Иллюстрируем это на простейшем примере свободных колебаний кольцевого стержня постоянного сечения. Пусть левый конец стержня закреплен (с этим концом мы сошлемся начало координат), а правый — свободен. Примем в качестве формы колебаний функцию

$$f(z) = az^2, \quad (24.25)$$

где z — координата сечения, a — постоянная. Это выражение удовлетворяет всем математическим условиям задачи и может быть положено в основу вычислений как по формуле Рэлея, так и по формуле Грэнвилла.

Для того чтобы воспользоваться формулой Рэлея, предварительно находим

$$\int_0^l EI (f'')^2 dz = 6a^2 EI l, \quad (24.26)$$

$$\int_0^l w^2 dz = \frac{a^2 l^3}{3}. \quad (24.27)$$

Теперь по формуле (24.11) определяем квадрат собственной частоты колебаний:

$$\rho^2 = \frac{36EI}{a^2 l^3}. \quad (24.28)$$

Заметим, что этот результат существенно отличается от того же значения

$$\rho^2 = \frac{12,266EI}{a^2 l^3}. \quad (24.29)$$

Для вычисления собственной частоты по формуле Грэммиа принимаем условную нагрузку в виде mat^2 и находим соответствующие колеблющиеся моменты от этой нагрузки:

$$\bar{M}_{\text{mat}} = \frac{\text{mat}}{12} (2\sigma^2 - 4\sigma^3 + 3\sigma^4).$$

Теперь определим знаменатель выражения (24.24):

$$\int \frac{\bar{M}_{\text{mat}}^2 dx}{EI^2} = \frac{\sigma^4 \text{mat}^2 P}{62,313 EI^2}. \quad (24.30)$$

Числитель того же выражения нами уже найден в (24.26) (24.27). Разделив (24.27) на (24.30), находим

$$\rho^2 = \frac{12,466 P}{\sigma^2 EI}, \quad (24.31)$$

что значительно ближе к точному результату, чем результат, вычисленный по формуле Рэлея.

Метод Грэммиа в его развинутой форме позволяет строить последовательные приближения и определять такие высшие частоты колебаний. Грэммиа доказал, что вычисленные по его методу собственные частоты всегда ближе к точным, чем вычисленные по методу Рэлея (при том же выборе аппроксимирующих функций).

Заключая изложение, нужно отметить, что вопрос о вычислении первого приближения в последние десятилетия утратил свою остроту благодаря широкой возможности построения высших приближений на ЭВМ; при этом в основу вычислительных алгоритмов обычно кладется метод Бубнова — Галеркина ^{*)}. Вначале (метод был предложен в 1913—1915 гг.) он был нацелен на решение задач относительно узкого класса, но впоследствии получили признание как весьма универсальной и мощной средство современной вычислительной математики.

Пример, являющийся современной теорией Рэлея (см. ниже разд. 24.1, § 4), был предложен С. А. Беркштейном во втором издании книги «Основы аналитической механики» (М.: Гостехиздат, 1941). Критически замечания по поводу обозначения С. А. Беркштейна были опубликованы М. Н. Дегтярем (см. его статью «К вопросу о редакциях задач

устойчивости в колебательных системах неэрмитовых операторов», Сб. трудов Института строительной механики АН СССР, Киев, 1961, № 10).

Формулы (24.28) предложены в книге Н. Н. Голубовича и А. Я. Сарана «Общая теория расчёта стержневых конструкций на устойчивость в колебаниях» (М.: Гостройиздат, 1962, с. 173).

Формулы Грэммиа были предложены в его статье «Ein neues Verfahren zur Lösung nichtlinearer Eigenwertprobleme» (Deutsche Archiv, 1929, т. 10) (см. также книгу: Вайсман К., Грэммиа Р. Теория механики. — М.: Гостехиздат, 1950, т. 1, с. 257—261).

§ 25. Ошибка Лагранжа

Теория колебаний линейных механических систем с несколькими степенями свободы была дана Лагранжем ^{*)} в его классическом труде «Аналитическая механика». Напомню основные положения этой теории.

Уравнения свободных колебаний для линейной механической системы с n степенями свободы имеют следующий вид (при отсутствии неупругих сопротивлений):

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_{ij} \ddot{q}_\alpha + c_{ij} \dot{q}_\alpha) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (25.1)$$

причем в консервативных системах матричные коэффициенты a_{ij} и матричные коэффициенты c_{ij} обладают свойством взаимности:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}. \quad (25.2)$$

Для интегрирования этой системы уравнений принимаются частные решения в виде

$$q_\alpha = A_\alpha \sin(\rho t + \varphi_\alpha). \quad (25.3)$$

Подстановка (25.3) в (25.1) приводит к системе алгебраических уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_{ij} \rho^2 - c_{ij}) A_\alpha = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (25.4)$$

В этой системе n уравнений содержится $n+1$ неизвестных, а именно амплитуды A_1, A_2, \dots, A_n и частота ρ .

^{*)} Иван Григорьевич Бубнов (1873—1959) — один из основоположников строительной механики в России. С 1899 г. — профессор Петербургского инженерно-механического института, с 1918 г. — профессор Мещеряковского института.

Варис Григорьевич Галеркин (1871—1948) — профессор Ленинградского инженерно-механического института, академик И 1935 г.). Автор работ в области теории упругости, в частности — во теории пластин.

^{*)} Жюзеф Луи Лагранж (1736—1813) — с детства юнцом профессор математики в Турине. С 1799 г., когда, а с 1796 г. — президент Неаполитанской Академии наук; с 1787 г. жил в Париже, где проводил большую работу и является членом Парижской Академии наук. В 1776 г. был избран почетным иностранным членом Петербургской Академии наук.

Ввиду того, что система уравнений (25.4) однородна относительно амплитуд A_i , она удовлетворится тривиальным решением

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0, \quad (25.5)$$

которое соответствует отсутствию колебаний и реализуется лишь при нулевых начальных условиях:

$$q_1 = \dot{q}_1 = \dots = q_n = \dot{q}_n = 0. \quad (25.6)$$

Помимо этого тривиального решения возможны ненулевые решения для A_i , но при условии, что равен нулю определитель системы уравнений (25.4):

$$\Delta(p^2) = 0, \quad (25.7)$$

или, более подробно,

$$\begin{vmatrix} a_{11}p^2 - c_{11} & a_{12}p^2 - c_{12} & \dots & a_{1n}p^2 - c_{1n} \\ a_{21}p^2 - c_{21} & a_{22}p^2 - c_{22} & \dots & a_{2n}p^2 - c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}p^2 - c_{n1} & a_{n2}p^2 - c_{n2} & \dots & a_{nn}p^2 - c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (25.8)$$

Если развить этот определитель, то получится алгебраическое уравнение с известной p^2 , причём степень этого уравнения равна n , т. е. числу степеней свободы системы. Решив это частотное уравнение, мы найдём n корней $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$; доказано, что все эти корни вещественны и положительны.

Частоты p называются *собственными*, поскольку все они полностью определяют свойствами силой системы, которые предопределены коэффициентами a_{ij} и c_{ij} .

Но при выполнении условия (25.7) одно из уравнений системы (25.4) является следствием остальных. Поэтому каждому значению p_i соответствуют определённые соотношения между амплитудами A_{1i} , иными словами, все амплитуды A_{1i} могут быть выражены через одну из них. Соотношения между амплитудами A_{1i} определят i -ю собственную форму колебаний.

Свободные колебания, возникающие после произвольного начального возмущения равновесия системы, представляются собой суммой n колебаний типа (25.3):

$$q_n = \sum_{i=1}^n A_{1i} \sin(p_i t + \psi_i).$$

Для того чтобы полностью определить этот процесс, необходимо знать еще $2n$ постоянных (одну из амплитуд и фазу для каждого слагаемого); они могут быть найдены

из $2n$ начальных условий — по два условия для каждой из обобщённых координат.

Лагранж кратко коснулся этого особого случая, когда среди корней частотного уравнения (25.8) имеются равные корни. В подобных случаях, пишет Лагранж, в решении встречаются члены, содержащие время t или лишь одну из (векторы или скалярные члены); например при равенстве двух корней получается решение вида

$$q_n = (A_n + B_n t) \sin(p t + \psi). \quad (25.9)$$

Как видно, с возрастанием времени t первый множитель неограниченно увеличивается и колебания приобретают резонансный характер.

Случаи свободных колебаний консервативной системы не могут неограниченно возрастать — это противоречило бы очевидным энергетическим соображениям; при таком процессе энергии системы увеличивались бы до бесконечности и система представляла бы собой самообразный вечный двигатель.

В чём же дело? Может быть, в задачах о свободных колебаниях консервативных механических систем случай равных корней исключается?

Нет, легко представить себе реальные механические системы, обладающие равными собственными частотами. Таковы, например, сферический маятник или шарик системы с двумя степенями свободы, изображённая на рис. 25.1.



Рис. 25.1. Система с двумя степенями свободы. При равных частотах в направлении x и y у обобщённые частоты равны две другие.

Если считать стержень представлять собой, например, пружинку с неравными сторонами, то собственные частоты будут, естественно, различаться; но если считать стержень круглым или квадратным, то обе собственные частоты будут равны между собой. В этих примерах равенство двух собственных частот, очевидно, не помешает за собой никакая особенность процесса колебаний, тем более неограниченного роста амплитуд.

Эти два примера непосредственно свидетельствуют о том, что случай равных корней физически легко осуществим, причем появление неволевого члена в решении противоречит здравому смыслу в законе сохранения энергии. Однако Лагранж уклонился от обсуждения этого парадокса: «...так как положение этих случаев не представляет интереса для рассуждаемого нами вопроса, то мы на нем не будем останавливаться».

Утверждение Лагранжа о появлении неволевого члена было опубликовано в 1788 г., когда вышло в свет первое издание его книги; оно было оставлено Лагранжем и во втором издании, которое вышло из печати в 1812 г. — за год до смерти Лагранжа. В 1853 г. «Аналитическая механика» вышла третьим изданием, которое редактировал знаменитый математик Жозеф Бертрам; и здесь утверждение Лагранжа было сохранено.

Лишь в 1856—1859 гг. К. Вейерштрасс *) и О. Н. Соков **) установили, что утверждение Лагранжа ошибочно, и даже в случае равных корней частотного уравнения решения сохраняют точно тригонометрическую форму, а неволевого члена (25.9) появиться не могут.

Дело заключается в следующем. В случае кратных корней система вида (25.1) имеет обычно решение с множителями t, P и т. д. Но мы имеем дело с особым случаем системы линейных дифференциальных уравнений, которая обладает определенными свойствами симметрии (25.2). В этом особом случае она и при наличии равных корней для P^2 имеет только решения вида (25.3) ***).

Остановимся подробнее на механической системе, в которой случай равных корней не только возможен, но и желателен. Рассмотрим задачу о свободных вертикальных колебаниях автомобиля, происходящих параллельно его плоскости симметрии. На рис. 25.2, а изображен сам автомобиль, а на рис. 25.2, б — его упрощенная

динамическая схема (в более полном анализе учитываются также массы колес и спойкиных с ними частей). Приведенные коэффициенты жесткости задних и передней подвески автомобиля (учитывающие жесткости рессор и пневматиков) обозначены через c_2 и c_1 . Центр тяжести разбит на расстоянии a и b соответственно от задней и передней опор. Масса кузова обозначена через m , а момент инерции кузова относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести, через I (ω — радиус инерции).



Рис. 25.2. Автомобиль и его упрощенная динамическая схема для анализа колебаний в вертикальной плоскости

Предполагается, что деформации самого кузова принимаются малы по сравнению с осадками опор; поэтому в динамической схеме горизонтальной стрелкой будет считаться совершенно жестким. Кроме того, положим, что горизонтальные колебания системы неволежны.

Такая система обладает двумя степенями свободы и за обобщенные координаты q_1 и q_2 примем вертикальные перемещения центра тяжести (положительное направление вниз) и угол поворота стрелки вокруг центра тяжести (положительное направление — против хода часовой стрелки). При этом осадки упругих опор равны соответственно $q_1 + aq_2$ (задней опоры) и $q_1 - bq_2$ (передней опоры).

С помощью этих выражений найдем кинетическую и потенциальную энергии системы

$$T = \frac{m\dot{q}_1^2}{2} + \frac{m\dot{q}_2^2}{2}, \quad (25.10)$$

$$П = \frac{c_1(a^2 + b^2)}{2} q_1^2 + \frac{c_1 ab}{2} q_1 q_2 + \frac{c_2 b^2}{2} q_2^2. \quad (25.11)$$

Соответственно уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial П}{\partial q_j} \quad (25.12)$$

*) Карл Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик, с 1856 г. — профессор Берлинского университета, иностранный член-корреспондент (1864 г.) и иностранный почетный член (1890 г.) Петербургской Академии наук.

**) Осип Николаевич Соков (1815—1896) — с 1841 г. профессор Петербургского университета, с 1867 г. — член-корреспондент Петербургской Академии наук. Автор ряда крупных работ по математике и механической механике.

***). Симметрией матрицы коэффициентов не следует злоупотреблять: условием для отсутствия неволевого члена в случае кратных корней (см. об этом в книге А. Н. Лурье «Обобщенное колебательное движение» (М.: Гостехиздат, 1956, § 9, 10, с. 110—113).

принимает вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 + (c_1a - c_2b)x_2 &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + (c_2a - c_1b)x_1 + (c_2a^2 + c_1b^2)x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (25.12)$$

После подстановка частного решения (25.3) приводит к однородной системе уравнений

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A_1 + (c_1 + c_2)A_1 + (c_1a - c_2b)A_2 &= 0, \\ -m\omega^2 A_2 + (c_2a - c_1b)A_1 + (c_2a^2 + c_1b^2)A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (25.14)$$

и получаем определитель частот

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m\omega^2 & c_1a - c_2b \\ c_2a - c_1b & c_2a^2 + c_1b^2 - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (25.15)$$

из которого следует частотное уравнение

$$\rho^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m} + \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{m\omega^2} \right) \rho^2 + \frac{c_2a(c_1 + c_2)}{m^2\omega^2} = 0. \quad (25.16)$$

Как правило, это уравнение имеет два различных корня. Каждому из них соответствует свое определенное соотношение между амплитудами, определяющее собственную форму колебаний. Это соотношение можно найти, например, из первого уравнения системы (25.14):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{m\omega^2 - c_1 - c_2}{c_2a - c_1b}. \quad (25.17)$$

То же получится и из второго уравнения системы (25.14). Остановимся на частном случае, когда выполняется равенство

$$\rho^2 = \omega_0^2, \quad (25.18)$$

т. е. когда радиус инерции представляет собой среднее геометрическое между величинами a и b ; заметим, что для этого расстояния $a + b$ между осями колес должно быть значительно меньше общей длины автомобиля (это на самом деле имеет место в автомобилях современной компоновки).

Если условие (25.18) выполняется, то частотное уравнение приобретает вид

$$\rho^4 - \frac{(c_1a + c_2b)}{m\omega_0^2} (a + b) \rho^2 + \frac{c_1c_2(a + b)^2}{m^2\omega_0^2} = 0 \quad (25.19)$$

и имеет следующие равные корни:

$$\rho_1^2 = \frac{c_1(a + b)}{mb}, \quad \rho_2^2 = \frac{c_2(a + b)}{ma}. \quad (25.20)$$

Для определения собственных форм подставляем эти корни поочередно в соотношение (25.17). Для первой формы получим, полагая $\rho^2 = \rho_1^2$:

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{1}{b}. \quad (25.21)$$

Здесь второе значение обозначает номер рассматриваемой собственной формы. После подстановки $\rho^2 = \rho_2^2$ в соотношение (25.17) найдем вторую собственную форму

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{1}{a}. \quad (25.22)$$

Эти формы изображены на рис. 25.3. Их особенность является независимость одной подвески автомобиля при колебаниях другой подвески. Практически это означает, что подвески автомобиля колеблются независимо и колебания одной из них не передаются другой.

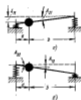


Рис. 25.3. Собственные формы колебаний автомобиля при $\rho^2 = \omega_0^2$

Свойства такой системы наиболее наглядно представляет динамическая схема, изображенная на рис. 25.4. Независимость колебаний обеих подвесок автомобиля можно считать определенной амплитудационным расстоя-



Рис. 25.4. Динамическая схема автомобиля с независимыми колебаниями обеих подвесок

ствием рассматриваемой схемы. Конечно, свободные колебания каждой из подвесок будут характеризоваться различными частотами.

В другом частном случае, когда

$$c_1a = c_2b, \quad (25.23)$$

уравнения (25.14) становятся независимыми:

$$A_1(-m\omega^2 + c_1 + c_2) = 0, \quad (25.24)$$

$$A_2(-m\omega^2\rho^2 + c_1a^2 + c_2b^2) = 0. \quad (25.25)$$

Независимость уравнений означает возможность чисто вертикальных колебаний без поворотов (подпрыжки)!

(рис. 25.5, а) или чисто угловых колебаний при неподвижном центре тяжести (двухрыльный) (рис. 25.5, б). Для случая подпрыгивания автомобиля имеем

$$A_1 \neq 0, \quad A_2 = 0 \quad (25.26)$$

и из уравнения (25.24)

$$-m\rho^4 + c_1 + c_2 = 0 \quad (25.27)$$

получим квадрат первой частоты

$$\rho_1^2 = \frac{c_1 + c_2}{m}. \quad (25.28)$$

Для случая галопирования автомобиля, когда

$$A_1 = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad (25.29)$$

из уравнения (25.25) находим квадрат второй частоты

$$\rho_2^2 = \frac{\alpha \rho^2 + \beta \rho^4}{\sigma \rho^2}. \quad (25.30)$$

Таким образом, частоты подпрыгивания и галопирования ρ_1 и ρ_2 , вообще говоря, различны.

Возможно ли равенство обеих частот? Схема автомобиля, обладающего таким свойством, признается особенно рациональной с точки зрения комфортабельности езды. Ясно, что в этом случае сильные колебания автомобиля возникают лишь при некоторой и единственной частоте толчков, тогда как в случае $\rho_1 \neq \rho_2$ сильные колебания смогут возникнуть при двух значениях этой частоты^{*)}.

Из уравнения (25.16) видно, что это верно оказывается

равными друг другу в случае, когда параметры динамической схемы автомобиля удовлетворяют равенству

$$\left[c_1 + c_2 + \frac{\alpha \rho^2 + \beta \rho^4}{\rho^2} \right]^2 = \frac{4c_1(\alpha + \beta \rho^2)}{\rho^2} = 0. \quad (25.31)$$

^{*)} Другим примером системы, для которой равенство собственных частот считается desirable, могут служить центрифуга с жестким ротором; в некоторой степени такая центрифуга равна частоте вращения ротора.

Легко проверить, что оно выполняется, если одновремительно удовлетворены оба условия (25.16) и (25.23). Кроме того, можно доказать, что эти условия не только достаточны, но и необходимы для выполнения равенства (25.31).

Если динамическая схема автомобиля удовлетворяет условиям (25.18) и (25.23), то единственная собственная частота колебаний определяется формулой

$$\rho = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}. \quad (25.32)$$

Такой автомобиль представляет собой пример системы с равными частотами — случай в котором Лагранж считал неизбежным появление нулевых членов. В действительности же такие члены не появляются и колебания складываются вполне обычным образом, не могут иметь разные фазы:

$$q_1 = A_1 \sin(\rho t + \varphi_1), \quad q_2 = A_2 \sin(\rho t + \varphi_2). \quad (25.33)$$

Постоянные A_1 , A_2 , φ_1 и φ_2 определяются начальными условиями. Какими бы ни были последние, колебания по каждой координате складываются одночастотными.

Мы убедились в том, что если механическая система не обладает диссипативными свойствами, т. е. лишена вязкости, то кратные корни вовсе не означают появления нулевых членов в решении. Но если дифференциальные уравнения движения содержат первые производные нулевых функций, то в случае кратных корней в решении возникают нулевые члены; вероятно, что из этого все же не следует, что в своем движении система должна обязательно непрерывно уходить от положения равновесия (это было бы физически невозможно в случае диссипативной системы).

Этот пример, который приводит в своей книге А. И. Лурье^{*)} (см. ссылку на с. 192). Дифференциальные уравнения движения системы с двумя степенями свободы имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \dot{q}_1 + q_1 + q_2 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + 3\dot{q}_2 + q_1 + 3q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (25.34)$$

Различное частное решение в виде

$$q_1 = e^{\rho t}, \quad q_2 = e^{\rho t}, \quad (25.35)$$

^{*)} Анатолий Иванович Лурье (1901—1981), член-корреспондент АН СССР, в течение многих лет профессор Ленинградского инженерно-технического института, автор многих трудов по теории устойчивости систем автоматического управления, математической механике.

мы приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$(k^2 + 2k + 2)(k - 1)^2 = 0. \quad (25.35)$$

Средя его корней

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1 + i, \quad k_4 = -1 - i \quad (25.37)$$

один является кратным, и вследствие этого решение с о л е р ж и т некое число. Например, при начальных условиях

$$q_1(0) = q_2(0) = \dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) \neq 0$$

можно найти, что решение имеет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= \dot{q}_2(0)(k^{-1} + e^{-t} - e^{-t} \cos t), \\ q_2 &= \dot{q}_2(0)(k^{-1} - e^{-t} \sin t) \end{aligned} \quad (25.38)$$

и свидетельствует о затухающем движении (так как $k^{-1} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$), хотя и содержит некие члены.

Период «Аналитической механики» Лагранжа на русский язык вышел в 1956 г. (М.: Гостехиздат, тт. 1, 2). Об аналоге Лагранжа см. в «Словаре по колебаниям» Л. Н. Макарычева (М.: Наука, 1972) и в упомянутой на с. 207 книге А. Н. Крылова.

§ 26. Пропущенные частоты

Следующая таблица, заимствованная нами из одной прекрасной книги по теории механических колебаний^{*)}, показывает различные значения собственных частот колеблющихся для пяти схем однородных балок длиной l . С помощью приведенных в таблице значений $(\alpha l)_n$ можно найти собственные частоты по уравнению

$$P_n = \alpha l \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (26.1)$$

в котором EJ — жесткость при изгибе, m — интенсивность распределенной массы.

По значениям корней характеристических уравнений можно заметить, что собственные частоты убывают при переходе от схемы 1 к схеме 3, а затем вновь начинают увеличиваться (можно заметить даже строгую симметрию результатов относительно «средней» схемы 3: они совпадают для схем 1 и 5, а также для схем 2 и 4). Это может вызвать

^{*)} По сравнению с этой книгой в нашей таблице даны различные порядки строк, однако один случай (балка с шарниром шарниром жестким) и не включен в перечень для более высоких частот.

№ схемы	Схема балки	Характеристическое уравнение	Первые три корня характеристического уравнения			
			$(\alpha l)_1$	$(\alpha l)_2$	$(\alpha l)_3$	$(\alpha l)_4$
1		$\text{ch } \alpha l \cos \alpha l = 1$	4,730	7,853	10,996	14,137
2		$\text{th } \alpha l = \text{tg } \alpha l$	3,927	7,068	10,210	13,352
3		$\text{ch } \alpha l \cos \alpha l = -1$	1,875	4,694	7,854	10,996
4		$\text{th } \alpha l \cos \alpha l = 1$	3,927	7,068	10,210	13,352
5		$\text{ch } \alpha l \cos \alpha l = 1$	4,730	7,853	10,996	14,137

ведомстве, так как схемы расположены в порядке убывания числа опорных связей, а в соответствии с общей теорией при устранении связей собственной частоты должны убывать (точнее говоря — не могут возрастать). Чем объяснить нарушение строго доказанной закономерности в рассматриваемой таблице?

Для того чтобы разобраться в чем здесь дело, нужно внимательно проследить за выкладками, которые приводят к характеристическим уравнениям.

Прежде всего запишем дифференциальное уравнение свободных колебаний

$$EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \quad (26.2)$$

в котором $z(x, t)$ — вертикальное отклонение произвольной точки оси балки от положения равновесия, x — горизонтальная координата точки, t — время. Будем искать частое решение в виде произведения двух функций

$$z = V(x) T(t), \quad (26.3)$$

Тогда уравнение (26.2) примет вид

$$EJV''T + mV\ddot{T} = 0,$$

или, иначе,

$$\frac{EJV''}{mV} = -\frac{\ddot{T}}{T} = p^2,$$

где p — пока неизвестная постоянная (постоянная разделения). Таким образом, вместо уравнения (26.2) получаются два следующих уравнения:

$$\ddot{T} + p^2 T = 0, \quad (26.4)$$

$$V'' - \alpha^2 V = 0 \quad \left(\alpha^2 = \frac{mp^2}{EJ} \right). \quad (26.5)$$

Из решения уравнения (26.4)

$$T = A \sin(pt + \varphi) \quad (26.6)$$

непосредственно видно, что постоянная p представляет собой собственную частоту. Для ее определения нужно обратиться к решению уравнения (26.5):

$$V = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \sinh \alpha x + C_4 \cosh \alpha x, \quad (26.7)$$

и подчинять его граничным условиям, соответствующим той или иной схеме закрепления. Это приводит к однородной системе уравнений относительно постоянных C_i . Условие

существования нетривиального решения найденной однородной системы дает возможность получить характеристическое уравнение для конкретной схемы; именно так и получены уравнения, приведенные в обсуждаемой таблице.

Важно отметить, что в этих выкладках обычная выкладкой предпологается, что величина p не равна нулю. Почему отбрасывается возможность того, что $p=0$? Есть ли для этого основания, в чем они заключаются и насколько они универсальны? Почему отбрасывают нулевые корни $\alpha l=0$, удаляя соответствующие характеристическим уравнениям для схем 1, 2, 4, 5?

Предположим с самого начала, что $p=0$. Тогда вместо уравнений (26.4) и (26.5) соответственно получим

$$\ddot{T} = 0, \quad (26.8)$$

$$V'' = 0. \quad (26.9)$$

Решение уравнения (26.8) можно записать в виде

$$T = A + Bt, \quad (26.10)$$

а решение уравнения (26.9) — в виде

$$V = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3. \quad (26.11)$$

Для определения постоянных C_i нужно пользоваться граничными условиями, зависящими от типа конечных закреплений. Если, например, рассмотреть схему 1, для которой должно быть

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \quad V(l) = 0, \quad V'(l) = 0,$$

то получится однородная система уравнений

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, & C_3 &= 0, \\ C_1 + C_2 l + C_3 l^2 + C_4 l^3 &= 0, \\ C_2 + 2C_3 l + 3C_4 l^2 &= 0, \end{aligned}$$

опредетель которой не равен нулю. Это означает, что все постоянные C_i равны нулю, т. е. движение предположенного вида попросту не существует. Аналогичным образом можно убедиться в том, что случай $p=0$ должен быть отброшен и для схемы 2, хотя $\alpha l=0$ формально удовлетворяет характеристическому уравнению (см. таблицу).

Если же рассмотреть схему 4, то результат получится такой. Для этой схемы граничные условия имеют вид

$$V(0) = 0, \quad V'(0) \neq 0, \quad V'(l) = 0, \quad V''(l) = 0.$$

После подстановки сюда выражения (26.11) получим

$$V = C_2 \rho,$$

и согласно (26.3) движение описывается выражением

$$v = (A + B)z,$$

в котором постоянная C_2 зависит от A и B . Полученное движение представляет собой равномерное вращение жесткой балки вокруг левого шарнира; такое движение в своем целом не исключено, хотя оно и не носит колебательного характера.

Итак, нулевым значением собственной частоты отвечает движение балки без деформаций. Это — общее правило: если система допускает перемещение частой как жестких тел, то возникают нулевые собственные частоты. При этом число таких частот равно числу степеней свободы механической системы, которая получается из заданной системы, если ее звенья считать недеформируемыми. В схемах 1—3 общая подвижность отсутствует; поэтому возникают и нулевых собственных частот. Схеме 4 соответствует одна нулевая собственная частота, а в схеме 5 — две такие частоты.

Наличие нулевых корней следует и из формального рассмотрения характеристических уравнений для схем 1, 2, 4, 5, но в первом из двух случаев эти корни должны быть сброшены, а в двух других случаях они имеют смысл. Таким образом, совпадение характеристических уравнений не означает полного совпадения спектров корней (и собственных частот).

Обычно, когда говорят о собственных частотах, то нулевые частоты, если они имеются, даже не упоминаются, а как бы подразумеваются, — так и поступил автор при рассмотрении книги. Однако о их существовании необходимо помнить, в особенности если сопоставляются собственные частоты различных систем; как мы видели, без этого возникает конфликт с общими теоремами.

Исправим последние строки данной выше таблицы, вписав в них пропущенные нулевые корни (см. с. 203).

Проблема гласит по вертикальным столбцам этой таблицы, мы убедимся, что монотонное возрастание корней вплоть и нужной пороговой достигнуто.

Во многих случаях можно дать формулу

$$\rho = \sqrt{\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}} \frac{GJ_p}{l},$$

№ схемы	Первые три корня характеристического уравнения		
	ρ_1	ρ_2	ρ_3
1	4,730	7,853	10,996
2	3,927	7,068	10,210
3	1,875	4,694	7,854
4	0,000	3,927	7,068
5	0,000	0,000	4,730

определяющую собственную частоту круговых колебаний двухмерной системы, возникающей на рис. 26.1. В этой формуле J_1 и J_2 — моменты инерции диска относительно осей системы, l — длина упругого



Рис. 26.1. Круговые колебательная система

вала, GJ_p — жесткость вала при кручении. Эта формула, конечно, верна, но в сущности она соответствует не ρ и r и ρ — собственной частоте, а ρ и r — нулевым собственным частотам равно нулю в соответствующей системе вращений вокруг оси как жесткого вала.

Теперь мы переходим к другому рассуждению, в котором роль играет тоже «нулевая» первая собственная частота, но не ρ и r и ρ и r — нулю (тема подкажана автором С. А. Савиным).

Будем рассматривать свободные продольные колебания стержня, находящегося в упругой среде, которая создает реакции, пропорциональные продольным перемещениям. Обозначив эти перемещения через $w(x, t)$, запишем матричность продольных реакций среды в виде $-\rho w$, где ρ — коэффициент жесткости среды. При этом вместо обычного дифференциального уравнения продольных колебаний

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(E и ρ — соответственно модуль упругости и плотность материала стержня) получим несколько более сложное дифференциальное уравнение

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{r}{\rho^2} w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (26.12)$$

(F — площадь сечения стержня). Разделив частное решение в виде $\alpha = W(\rho)T(\rho)$ и разделив переменные, приходим к дифференциальным уравнениям

$$\ddot{T} + \rho^2 T = 0, \quad (26.13)$$

$$W'' + \alpha^2 W = 0, \quad (26.14)$$

где

$$\alpha^2 = \left(\rho^2 - \frac{r}{\rho^2} \right) \frac{E}{E_0}. \quad (26.15)$$

Решение уравнения (26.13)

$$T = A \sin(\rho l + \gamma)$$

показывает, что движение представляет собой гармонические колебания с угловой частотой ρ ; решение уравнения (26.14)

$$W = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x \quad (26.16)$$

вместе с граничными условиями позволяют найти значение ρ . Остановимся на случае, когда левый конец стержня ($x=0$) свободен, а на правом конце ($x=l$) со стержнем связана сосредоточенная масса M . При этом граничные условия на обоих концах будут относиться к продольной силе, которую можно записать в виде

$$N = EF \frac{\partial u}{\partial x} = EF W' T. \quad (26.17)$$

Так как при $x=0$ продольная сила тождественно равна нулю, то первым граничным условием будет служить соотношение $W'(0)=0$; при этом согласно (26.16) $C_1=0$ и, следовательно, дальше можно исходить из более короткой функции

$$W = C_2 \cos \alpha x. \quad (26.18)$$

На правом конце стержня продольная сила равна силе инерции груза, которую можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} -M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} &= -M W'(l) \dot{T} = M W'(l) \rho^2 T = \\ &= M W'(l) T \left(\frac{\alpha l E}{\rho} + \frac{r}{\rho^2} \right). \end{aligned} \quad (26.19)$$

Приравняв (26.17) и (26.19) при $x=l$, получим второе граничное условие:

$$E F W'(l) = M W'(l) \left(\frac{\alpha l E}{\rho} + \frac{r}{\rho^2} \right), \quad (26.20)$$

которое при учете выражения (26.18) приводит к характеристическому уравнению

$$\operatorname{tg} \alpha l = -\pi \left(\alpha l + \frac{r}{\alpha} \right). \quad (26.21)$$

Здесь $\pi = M/(r l E)$ — относительная масса груза, $\nu = -r l^2/(E F)$ — безразмерный коэффициент жесткости связи.

Прежде всего отметим, что если полученное уравнение имеет корень $+\alpha l_0$, то является также отрицательный корень $-\alpha l_0$; одним из этих корней согласно (26.15) отвечает одно и то же значение собственной частоты. Поэтому дальше можно не рассматривать отрицательные значения αl .

Если построить графики обеих частей уравнения (26.21), то абсциссы точек пересечения графиков определят корни уравнения. В качестве примера это сделано на рис. 26.2 для $\pi=1$ и $\nu=1$. Сплошной и штрихпунктирной линиями показаны графики соответственно левой и правой частей уравнения (26.21).

Как видно, в интервале значений 0, π существует одна точка пересечения графиков; ее абсцисса $\alpha l = 1,956$ согласно (26.15) определяет наименьшее значение собственной частоты

$$\rho = \sqrt{\frac{E \alpha^2}{\rho} + \frac{r}{\rho^2}} = \sqrt{1 + \frac{\nu \pi^2}{\alpha}} \sqrt{\frac{r}{\rho^2}} = 2,197 \sqrt{\frac{r}{\rho^2}}. \quad (26.22)$$

Если уменьшать относительную массу груза, то штрихпунктирная линия будет несколько изменяться, причем точка ее пересечения со сплошной линией будет перемещаться в направлении, указанном на рисунке стрелкой, т. е. собственная частота будет возрастать. Пока в

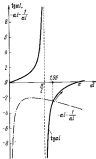


Рис. 26.2. Графическое решение уравнения (26.21)

найденных результатов ничего подпорочительного нет — увеличение массы груза и должно повлечь за собой возрастание собственной частоты.

Если на правом конце нет груза, то вместо граничного условия (26.20) нужно принять $W'(l)=0$. Это приводит к характеристическому уравнению $\operatorname{th} \alpha l = 0$; наименьший корень $\alpha l = 0$ позволяет согласно (26.15) найти нулеву собственную частоту

$$p = \sqrt{\frac{r}{\rho l^3}}, \quad (26.23)$$

которая оказывается меньше β , чем по параметру (26.22). Вот это уже странно: устранение концевой грузы должно было повлечь за собой увеличение собственной частоты.

Возникает естественное подозрение, что выражением (26.22) определяется не первая, а вторая собственная частота ω , следовательно, выражения (26.22) и (26.23) нельзя сравнивать. Но где же была сгустилена первая собственная частота для стержня с грузом?

Если внимательно обдумать наши выкладки, то можно заметить одно сомнительное место: при решении трансцендентного уравнения (26.21) мы считали, что его корни αl должны быть вещественными.

Однако из соотношения (26.15) видно, что отрицательность α^2 (и следовательно мнимость α), вообще говоря, может не противоречить положительности ρ^2 , а потому вполне возможна. Поэтому нужно проверить, имеются ли корни характеристического уравнения в мнимой области. Считая, что $\alpha^2 < 0$, удобно ввести положительную величину $\beta^2 = -\alpha^2$; тогда $\alpha = i\beta$, $\operatorname{th} \alpha l = i \operatorname{th} \beta l$ и характеристическое уравнение (26.21) приобретает вид

$$\operatorname{th} \beta l = m \left(-\beta l + \frac{b}{\beta} \right). \quad (26.24)$$

На рис. 26.3 представлено графическое решение этого уравнения для принятых выше значений постоянных $m=1$, $b=1$. Здесь сразу обнаруживается корень $\beta l = 0,735$, которому соответствует $(\beta l)^2 = 0,540 = (\alpha l)^2 = -0,540$. Подставляя этот результат в соотношение (26.15), найдем

$$p = 0,678 \sqrt{\frac{r}{\rho l^3}}. \quad (26.25)$$

Это и есть правильное значение собственной частоты, которое с нам можно сравнить — результат (26.23). Как и

предполагалось нами, результат (26.22) относится ко второй собственной частоте. Читатель может проверить, что первым собственным частотам (26.23) и (26.25) соответствует несколько особая собственная форма — перемещение всего стержня как жесткого целого вдоль своей оси.

В связи с переходом от уравнения (26.21) к уравнению (26.24) вспоминается образное слово французского математика Ж. Адамара: «Наиболее короткий путь между двумя

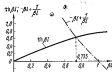


Рис. 26.3 Графическое решение уравнения (26.24)

отстоями в вещественной области часто проходит через мнимую область.

Таблица, приведенная в начале параграфа, заимствована из с. 258 книги А. Н. Крылова «Обработка судна» (Л.: М.: СИТЛ, 1938). В ней же дано ее число отбита из с. 57 книги А. П. Фаддеева «Канонизация нелинейных систем» (М.: Машгизстрелма, 1974).

§ 27. Медленно изменяющиеся силы

На первых страницах многих курсов сопротивления материалов, строительной механики и теории упругости можно встретить приблизительно такой текст: «Основное содержание настоящей книги посвящено случаям статического нагружения, когда внешние силы изменяются столь медленно, что можно пренебречь ускорениями, а следовательно, — силами инерции и соответствующими им динамическими эффектами. К сожалению, подобный текст не содержит образцовой количественного характера, и читателю остается несильно, что конкретно нужно понимать под словами «столь медленно». Конечно, в начале курса подход соответствующим количественным оценкам был бы затруднителен, поскольку читатель к этому еще не подготовлен. Но, в сущности, такие оценки не

приводятся и далее, а понятие «жесткости» так и остается чисто качественным.

В действительности этот вопрос немаловажен. — без надлежащих количественных оценок можно попасть в ошибку, считая нагружение статическим, когда на самом деле динамические эффекты пренебрегать нельзя. В других случаях неопытный исследователь может сделать громадной и ненужной динамический анализ, тогда как можно ограничиться простым статическим решением. Существенно, что ни длительность действия нагрузки, ни темп ее изменения во времени сами по себе еще ничего не означают, так как не являются роль играют и собственные свойства механической системы, к которой нагрузка прикладывается.

Яркий пример указан А. Н. Крыловым *): хотя при выстреле из артиллерийского орудия длительность действия давления газов на ствол орудия составляет всего 0,01 с (для рассмотренного А. Н. Крыловым случая), однако при возбуждении радиальных колебаний ствола такие нагрузки можно считать статическими! Наряду с этим можно было бы привести противоположные примеры, когда нужно считать динамической нагрузку, которая мгновенно возрастает и затем монотонно в течение нескольких секунд убывает до нуля.

В настоящем параграфе мы дадим некоторые количественные оценки в случае с простого случая, когда механическая система с одной степенью свободы нагружена длительной действующей гармонической вынуждающей силой $P_0 \sin \omega t$. Обозначим через $q(t)$ обобщенную координату, т. е. характерное перемещение системы в процессе установившихся вынужденных колебаний; тогда можно написать

$$q = A \sin \omega t, \quad (27.1)$$

где

$$A = \frac{P_0}{c \sqrt{1 - \omega^2 / \omega_0^2}}, \quad (27.2)$$

[A] — амплитуда вынужденных колебаний, c — коэффициент жесткости системы, ω_0 — ее собственная частота.

*) Алексей Николаевич Крылов (1883—1941) — выдающийся инженер, авторобострательно в историко науку. Академик (с 1916 г.), Герой Социалистического Труда (с 1943 г.). С 1920 г. в течение пяти лет занимал пост председателя Вюрбургской академии в Петербурге (Ленинград).

Отношение амплитуды колебаний к перемещению P_0/c , вызванному статически действующей силой P_0 (т. е. при $\omega \rightarrow 0$),

$$\mu = \frac{c|A|}{P_0} = \left| \frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} \right|, \quad (27.3)$$

называется коэффициентом динамичности. При малых значениях отношения ω/ω_0 коэффициент μ мало отличается от единицы. Если, например, пренебречь динамическими эффектами, составляющими меньше 5% от статических, то статической можно считать такую силу, при действии которой коэффициент динамичности не превосходит значения 1,05. Из этого условия можно с помощью (27.3) найти условие «статичности» действующей силы $\omega/\omega_0 < 0,218$ или

$$T/T_0 > 4,59, \quad (27.4)$$

где T — период вынуждающей силы, T_0 — собственный период системы. Округлив последний результат, скажем, что гармоническую вынуждающую силу можно считать статической, если ее период по крайней мере в пять раз превосходит собственный период колебаний системы.

Обратимся теперь к системе с распределенными параметрами. Если гармоническая вынуждающая сила приложена к одному из торцов стержня с продольной осью, совершающего продольные колебания, а другой конец стержня закреплён, то для наибольшего значения продольного перемещения нагруженного торца можно найти

$$\mathcal{W}(l) = \frac{P_0 l}{27} \frac{2\pi}{3\omega} \operatorname{tg} \frac{\pi \omega}{3\omega_0}.$$

Здесь $\omega_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — наименьшая собственная частота, E и ρ — соответственно модуль упругости и плотность материала стержня, F — площадь сечения, l — длина. Так как статически действующая сила P_0 вызывает перемещение конца $P_0 l / (EF)$, то коэффициент динамичности равен

$$\mu = \frac{2\pi}{3\omega} \operatorname{tg} \frac{\pi \omega}{3\omega_0}.$$

Если и в данном случае исходить из допустимости пятипроцентной погрешности, то для частоты «медленной» силы получим условие $\omega/\omega_0 < 0,239$, для периода — неравенство

$$T/T_0 > 4,18, \quad (27.5)$$

которое не слишком отличается от условия (27.4).

В целом из этих стандартных расчетов можно получить достаточно ясное представление о том, в каких случаях гармоническую вынуждающую силу можно считать статической.

Обратимся теперь к случаю, когда на систему с одной или несколькими степенями свободы действует сила, изменяющаяся во времени по закону, показанному на рис. 27.1, а, т. е.

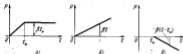


Рис. 27.1. а) Законное изменение силы; б) изменение силы в первой координатной задаче; в) изменение силы во второй координатной задаче

сначала возрастающая по линейному закону $F = \beta t$, а затем при $t > t_0$ остается постоянной. По-видимому, при достаточно больших значениях времени t_0 силу можно считать статической, а при весьма малых значениях t_0 — внезапно приложенной; поэтому при постоянном уменьшении t_0 коэффициент динамичности будет увеличиваться от единицы до двух.

Сначала решим вспомогательную задачу о действии силы, изменяющейся во времени так, как это показано на рис. 27.1, б. В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{q} + c\dot{q} = \beta t \quad (27.6)$$

(α — инерционный коэффициент). Если записать общее решение и затем подставить его нулевыми начальными условиями, то в результате получится для $t > 0$

$$q = -\frac{\beta t}{c} - \frac{\beta \sin \rho t}{c\rho}. \quad (27.7)$$

Этим результатом можно воспользоваться и во второй координатной задаче, когда внешняя сила меняется так, как показано на рис. 27.1, в. Для этого нужно в (27.7) изменить знак β и вместо t подставить $t - t_0$. Тогда для $t > t_0$ получится

$$q = -\left[\frac{\beta(t - t_0)}{c} - \frac{\beta \sin \rho(t - t_0)}{c\rho} \right]. \quad (27.8)$$

Вообще говоря, показанное на рис. 27.1, а, можно рассматривать как сумму воздействий, показанных на рис. 27.1, б и в; поэтому движение, соответствующее воздействию по рис. 27.1, а, определится как сумма решений (27.7) и (27.8):

при $0 < t < t_0$,

$$q = -\frac{\beta t}{c} - \frac{\beta \sin \rho t}{c\rho}, \quad (27.9)$$

при $t > t_0$,

$$q = -\frac{\beta t}{c} - \frac{\beta}{c\rho} 2 \sin \frac{\rho t_0}{2} \cos \rho \left(t - \frac{t_0}{2} \right). \quad (27.10)$$

Первое слагаемое в выражении (27.10) представляет собой отклонение, вызываемое статической силой βt_0 , а второе слагаемое — динамическую добавку. Эта добавка меняется во времени, и ее наибольшее значение составляет $\left| \frac{2\beta}{c\rho} \sin \frac{\rho t_0}{2} \right|$. При любых значениях ρt_0 это значение не превосходит величины $2\beta/c\rho$, так что относительная динамическая добавка составляет не более чем

$$\frac{2\beta(t_0)}{c\rho} = \frac{2}{\rho t_0}.$$

Будем считать силу статической, если найденная величина, как и раньше, не превосходит 0,05. Это условие выполняется, когда $\rho t_0 > 40$, т. е.

$$\frac{t_0}{T} < 6,37 \quad (27.11)$$

— длительность линейного возрастания силы должна во крайней мере в 6,4 раза превосходить собственный период колебаний системы. Однако (27.11) впервые предложил Н. Г. Бубнов.

Полученные оценки относятся к довольно тонким, но все же частым случаям нарушения. Несколько более общий случай был рассмотрен А. Н. Крыловым; но прежде чем перейти к его оценке динамичности, приведем решение задачи о действии произвольной вынуждающей силы $F(t)$ на систему с одной степенью свободы. Это решение может быть представлено в двух вариантах.

Первый вариант. Прежде всего вспомним, что общее решение дифференциального уравнения свободных колебаний

$$\ddot{q} + c\dot{q} = 0 \quad (27.12)$$

имеет вид

$$q = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt. \quad (27.13)$$

Здесь $q=q(t)$ — координата, t — время, $p = \sqrt{2g}$ — собственная частота, C_1 и C_2 — постоянные, подлежащие определению из начальных условий движения. Теперь рассмотрим случай, когда движение вызывается однократным мгновенным импульсом S , прикладываемым к системе в момент t . Начальные условия относятся к моменту времени непосредственно после приложения импульса S и имеют вид

$$q = 0, \quad \dot{q} = \frac{S}{a} \quad \text{при } t = \tau. \quad (27.14)$$

Теперь, определив постоянные

$$C_1 = \frac{S}{ap} \cos p\tau, \quad C_2 = -\frac{S}{ap} \sin p\tau, \quad (27.15)$$

получим решение уравнения (27.12) в виде

$$q = \frac{S}{ap} \sin p(t - \tau). \quad (27.16)$$

Это выражение и служит основой рассматриваемого способа решения. Произвольную вынуждающую силу $P=P(t)$ можно представить в виде последовательности бесконечно



Рис. 27.2. Замена непрерывной силы последовательностью бесконечно малых импульсов

малых импульсов $P(t)dt$, изображенных вертикальными полосками на рис. 27.2. Зависит ли выражения (27.16)

$$S = P(t)dt, \quad (27.17)$$

мы найдем колебания, вызываемые действием одного из импульсов; чтобы определить движение, которое вызывается заданной силой, необходимо наложить все влияния всех элементарных импульсов. Таким образом, находим, что

перемещение в момент времени t равно (при нулевых начальных условиях)

$$q = \frac{1}{ap} \int_0^t P(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau. \quad (27.18)$$

К этой форме решения часто приводят, пользуясь методом вариации постоянных; только что изложенный способ (способ *) более наглядно выясняет «суперпозиционную» природу выражения (27.18).

Второй вариант. Рассмотрим в качестве вспомогательной задачи действие скачка ΔP (рис. 27.3, а), представляющего собой силу $\Delta P = \text{const}$, прикладываемую к системе

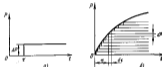


Рис. 27.3. а) Сила скачка ΔP ; б) замена непрерывной силы последовательностью бесконечно малых скачков

в момент t . Для определения движения системы необходимо интегрировать однородное дифференциальное уравнение

$$\ddot{q} + p^2 q = \frac{\Delta P}{a} \quad \text{при } t \geq \tau. \quad (27.19)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt + \frac{\Delta P}{c}. \quad (27.20)$$

Для определения постоянных служат начальные условия $q=0, \dot{q}=0$ при $t=\tau$. Пользуясь ими, находим

$$C_1 = -\frac{\Delta P}{c} \sin p\tau, \quad C_2 = -\frac{\Delta P}{c} \cos p\tau \quad (27.21)$$

* Этот способ был указан Даламбером в 1734 г.

и вместо (27.20) получаем

$$q = \frac{dP}{dt} [1 - \cos \rho (t - \tau)] \quad (t \geq \tau). \quad (27.22)$$

Вновь обращаясь к задаче о действии произвольной вынуждающей силы, представим ее в виде последовательности бесчисленно малых скачков, соответствующих горизонтальным полоскам на рис. 27.3, б. Для того чтобы определить действие одного такого скачка, нужно в решении (27.22) подставить

$$\Delta P = \dot{P}(\tau) dt. \quad (27.23)$$

Если проинтегрировать полученное таким способом выражение, то мы найдем результат действия заданной силы в виде

$$q = \frac{P(t)}{v} - \frac{1}{v} \int_0^t \dot{P}(\tau) \cos \rho (t - \tau) dt. \quad (27.24)$$

Здесь первый член представляет собой перемещение, которое было бы вызвано силой $P(t)$ при ее статическом действии, а второе слагаемое имеет смысл динамической поправки.



Рис. 27.4. Схема индикатора Викарса

Конечно, здесь предполагается, что сила $P(t)$ вообще не имеет разрывов, т. е. непрерывна. Если такое разрывы имеются, то они должны быть особо выделены, и при этом в решении (27.24) дополнительно вводятся слагаемые типа (27.23). (В этом случае ΔP — значение конечного скачка.)

На основании (27.24) и основной данной в 1909 г. А. Н. Крыловым оценки динамичности. Вскоре она была весьма эффективно применена на практике.

В 1914 г. в Петербурге при полигонных испытаниях пробной установки 12-дюймовых корабельных струдей было обнаружено, что давление, развиваемое в цилиндрах компрессора, составляет 450 атмосфер вместо нормального давления 250 атмосфер, на которое были выполнены расчеты прочности. Казалось, что все построенные компрессоры (48 штук) придется забраковать из-за их несоответствия неожиданно большому фактическому давлению. Но каждый из компрессоров стоил 50 тысяч рублей, а замена всех компрессоров полами повлекла бы расход около двух с по-

лотной миллионов рублей. Кроме того, такая замена отдала бы срок готовности кораблей.

Все это дело было передано на экспертизу А. Н. Крылову, который, опираясь на свои исследования, относящиеся к 1909 г., установил, что регистрирующий прибор — индикатор Викарса (см. схему на рис. 27.4) — дает сильно преувеличенные показания, а истинное максимальное давление примерно вдвое меньше записанного. Из заключения А. Н. Крылова следовало, что замена компрессоров совершенно не нужна, эти были не только сэкономлены большая денежная сумма, но и предотвращен срок одновременного ввода кораблей в строй.

Для того чтобы получить оценку А. Н. Крылова, обозначим через Δq абсолютное значение динамической поправки

$$\Delta q = \frac{1}{v} \left| \int_0^t \dot{P}(\tau) \cos \rho (t - \tau) dt \right| = \left| \frac{\cos \rho t}{v} \int_0^t \dot{P}(\tau) \cos \rho \tau dt + \frac{\sin \rho t}{v} \int_0^t \dot{P}(\tau) \sin \rho \tau dt \right| \quad (27.25)$$

и положим

$$A = \int_0^t \dot{P}(\tau) \cos \rho \tau dt, \quad B = \int_0^t \dot{P}(\tau) \sin \rho \tau dt. \quad (27.26)$$

Тогда

$$\Delta q = \left| \frac{A}{v} \cos \rho t + \frac{B}{v} \sin \rho t \right|, \quad (27.27)$$

и наибольшее значение поправки, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\Delta q \leq \frac{1}{v} \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (27.28)$$

Следует А. Н. Крылову, рассмотрим тот основной для индикаторов случай, когда период свободных колебаний системы значительно меньше продолжительности действия силы, и предположим, что сила меняется во времени по закону рис. 27.5, а; такая сила в течение некоторого времени t_0 монотонно растет до своего максимального значения, а затем постепенно убывает (как это имеет место, например, при действии взрыва). Определим наибольшее абсолютное значение Δq динамической поправки для некоторого момента $t \leq t_0$, т. е. на восходящей ветви кривой $P = P(t)$. В подынтегральных произведениях, входящих в (27.25),

первый множитель на интервале $[0, t_0]$ всюду положительный, а второй множитель периодически меняет знаки. Чтобы найти оценки для величин A и B , разобьем промежуток $[0, t_0]$ на такие частные промежутки, в которых функции $\cos pt$ и $\sin pt$ сохраняют постоянный знак. Если $T_0 = 2\pi/p$ — период свободных колебаний системы, то для вычисления A можно принять следующие промежутки:

$$\left[0, \frac{T_0}{4}\right], \left[\frac{T_0}{4}, \frac{3T_0}{4}\right], \left[\frac{3T_0}{4}, \frac{5T_0}{4}\right], \dots$$

Аналогично для вычисления B такими промежутками являются

$$\left[0, \frac{T_0}{2}\right], \left[\frac{T_0}{2}, T_0\right], \left[T_0, \frac{3}{2}T_0\right], \dots$$



Рис. 27.5. Зависимость силы P от производной от времени

Прежде всего займемся оценкой величины A . Согласно выражению (27.26) имеем

$$A = \int_0^{t_0} \dot{P}(t) \cos pt \, dt = \int_0^{\frac{T_0}{4}} \dot{P}(t) \cos pt \, dt + \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} \dot{P}(t) \cos pt \, dt + \int_{\frac{3T_0}{4}}^{\frac{5T_0}{4}} \dot{P}(t) \cos pt \, dt + \dots \quad (27.29)$$

В первом интеграле величина $\cos pt$ все время положительна, во втором отрицательна, в третьем положительна и т. д. Функция $\dot{P}(t)$ своего знака не меняет и все время по-

ложительна. Поэтому, применяя для каждого из интегралов теорему о среднем значении, получим

$$\int_0^{\frac{T_0}{4}} \dot{P}(t) \cos pt \, dt = \dot{P}(\tau_1) \int_0^{\frac{T_0}{4}} \cos pt \, dt = \frac{T_0}{2} \dot{P}(\tau_1),$$

$$\int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} \dot{P}(t) \cos pt \, dt = \dot{P}(\tau_2) \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} \cos pt \, dt = -\frac{T_0}{2} \dot{P}(\tau_2)$$
(27.30)

и т. д. Здесь $0 < \tau_1 < T_0/4$, $T_0/4 < \tau_2 < 3T_0/4$, ... , т. е. τ_1, τ_2, \dots — некоторые промежуточные значения времени внутри последовательных интервалов. Таким образом,

$$A = \frac{T_0}{2} \left[\frac{1}{2} \dot{P}(\tau_1) - \dot{P}(\tau_2) + \dot{P}(\tau_3) - \dots \right]. \quad (27.31)$$

Так как кривая $\dot{P}(t)$ в интервале $[0, t_0]$ имеет только один максимум (см. рис. 27.5, б), то абсолютная величина суммы, записанной в скобках выражения (27.31), не может превысить наибольшего из слагаемых; в свою очередь, последнее не превосходит максимального значения производной \dot{P} , которое мы обозначим через \dot{P}_{\max} . Следовательно,

$$|A| \leq \frac{T_0}{2} \dot{P}_{\max}. \quad (27.32)$$

Совершенно так же можно найти, что

$$|B| \leq \frac{T_0}{2} \dot{P}_{\max}. \quad (27.33)$$

Поэтому

$$\sqrt{A^2 + B^2} \leq \frac{T_0}{2} \sqrt{2} \dot{P}_{\max}. \quad (27.34)$$

и вместо (27.28) получается

$$\Delta q \leq \frac{T_0}{20} \sqrt{2} \dot{P}_{\max}. \quad (27.35)$$

Заметим, что $\sqrt{2}(n < 1/2)$, А. Н. Крылов предложил неравенству (27.35) вид

$$\Delta q < \frac{T_0}{22} \dot{P}_{\max}. \quad (27.36)$$

Величина $\frac{T_0}{22} \dot{P}_{\max}$ имеет размерность силы и представляет собой наибольшее возможное приращение силы P за про-

момент времени $T_0/2$, т. е. за полупериод свободных колебаний. Обозначив эту величину через ΔP_{max} , получим такую выравниваемую запись:

$$\Delta q < \frac{\Delta P_{max}}{c}. \quad (27.37)$$

Это и есть формула Крылова. Здесь правая часть представляет собой перемещение, которое могла бы вызвать статически действующая сила ΔP_{max} . Если, что чем меньше период свободных колебаний, тем меньше величина ΔP_{max} , а следовательно, и величина Δq . А. Н. Крылов пишет: «Следовательно, если период свободных колебаний системы настолько мал по сравнению с продолжительностью возрастающей силы, действующей на систему, что увеличивая величина действующего усилия за промежуток времени, равный полупериоду свободных колебаний системы, может быть пренебрежена, то oscillation системы может быть рассмотрено статически, и погрешность не превосходит той величины, которая соответствует скачкообразному изменению давления».

Для правильности показаний пружинного индикатора необходимо, чтобы поправка (27.37) была весьма мала; это в свою очередь означает, что собственный период системы индикатора должен быть малым по сравнению с длительностью приложенной силы, т. е. поршня индикатора следует делать по возможности более легким, а пружину — весьма жесткой. Такими основными требованиями, которыми можно руководствоваться при конструировании индикатора давления.

Посмотрим, в какой мере было соблюдено это требование в индикаторах Викарса. А. Н. Крылов приводит следующие данные индикатора: вес пружины 0,817 кгс, вес поршня 0,092 кгс, длина пружины $l=12$ см, коэффициент жесткости пружины $c=97,1$ кгс/см. По этим значениям находим приведенную массу по Рылеву

$$m = \left(0,092 + \frac{1}{3} \cdot 0,817\right) / 981 = 3,71 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кгс} \cdot \text{с}^2}{\text{см}}$$

и угловую частоту свободных колебаний

$$\rho = \sqrt{\frac{981}{3,71}} \cdot 10^2 = 511 \text{ с}^{-1}.$$

Соответственно этому собственный период индикатора равен $T_0=0,012$ с. (В своем более точном расчете А. Н. Крылов получил почти этот же результат $T_0=0,013$ с.) Такой индикатор будет правильно записывать изменения давле-

ния лишь при условии, что длительность нарастающей давления t_d значительно больше, чем 0,012 с. На самом же деле в конструкции, исследованной А. Н. Крыловым, величина t_d была не большей, а даже меньшей, чем период T_0 . Это означает, что давление воспринимается индикатором как быстро изменяющаяся нагрузка. В данном случае индикаторы Викарса должны были дать искаженные показания.

На рис. 27.6 показаны кривые, рассчитанные А. Н. Крыловым для этого случая. Сплошной линией изображено истинное изменение действующей силы, а штриховой линией — соответствующее изменение упругого перемещения. Здесь ясно видно, что по такой записи переменной нельзя судить об истинном законе изменения силы.



Рис. 27.6. Зависимости действующей силы и упругого перемещения от времени

Формулы А. Н. Крылова выведены в работе «Некоторые вопросы о перереждении индикаторов (из вст. Собр. трудов, т. IV, М., 1927). Эти выкладки содержат также в конце 60 некоторых дифференциальных уравнений математической физики, вышедших из работы «Положение вопроса» (1920—22); в этой же книге (в 123) рассматривается также и различные колебания стержня прилобного сечения, в которой было упомянуто в начале настоящего параграфа.

§ 28. Четыре способа решения задачи

о действии периодических мгновенных импульсов

Для решения любого раздела механики немалое значение имеют поиски улучшенных алгоритмов и совершенствование расчетных методов даже для ранее решенных задач. Оцененное от лишних проволочек время и краткое решение называют краткими и даже элементарными (А. А. Андронов). «Красота в математике идет рука об руку с целесообразностью: мы редко называем изящными рассуждениями, не пришедшим к законченной цели или более длинным, чем это представляется необходимым», — писал Н. Г. Чебышев *) в «Математической автобиографии».

*) Николай Григорьевич Чебышев (1834—1894) — профессор Казанского университета, автор ряда работ по математике, теории чисел, теории функций, член-корреспондент АН СССР (с 1893 г.).

Сигналом имеет непосредственное отношение к содержанию настоящего параграфа, а которое будет последовательно рассмотрены четыре варианта решения одной и той же задачи. Все эти варианты можно встретить в современной литературе, хотя полностью издают лишь один из них. Он известен более полурка, но по известным причинам до сих пор не получила заслуженного распространения.

В некоторых технических вопросах приходится иметь дело с кратковременными силами, действие которых повторяется через относительно большие одинаковые промежутки времени. В этих случаях часто пользуются идеализированным представлением о действиях импульсов и сводят задачу к исследованию действия периодических прикладываемых, разных друг другу мгновенных импульсов S . Рассмотрим и обсудим четыре варианта решения такой задачи.

Первый способ. Пусть T — период приложения импульсов; тогда $0, T, 2T, \dots$ — моменты приложения импульса (начального), второго, третьего и т. д. импульсов. Рассмотрим сначала действие только одного начального импульса. В этом случае дифференциальное уравнение движения

$$a\ddot{q} + c\dot{q} = 0 \quad (28.1)$$

имеет решение

$$q = \frac{S}{a\omega} \sin \rho t \quad (0 < t < T) \quad (28.2)$$

($\rho = \sqrt{c/a}$ — частота свободных колебаний), которое удовлетворяет как уравнению (28.1), так и начальным условиям (т. е. условиям возникновения движения непосредственно после исчезновения начального импульса):

$$q = 0, \quad \dot{q} = \frac{S}{a}. \quad (28.3)$$

Движение, вызываемое только следующим первым импульсом, можно получить из того же выражения (28.2) в виде

$$q = \frac{S}{a\omega} \sin \rho(t - T) \quad (T < t < 2T), \quad (28.4)$$

Аналогично можно найти результат действия следующих импульсов. Чтобы получить общее движение, нужно сложить эти парциальные движения. Для одного полного интервала времени $[nT, (n+1)T]$, т. е. между моментами

применения n -го и $(n+1)$ -го импульсов, имеем

$$q = \frac{S}{a\omega} [\sin \rho t + \sin \rho(t - T) + \sin \rho(t - 2T) + \dots + \sin \rho(t - nT)] = \\ = \frac{S}{a\omega} \sum_{k=0}^n \sin \rho(t - kT) \quad (nT < t < (n+1)T). \quad (28.5)$$

Для начала этого интервала времени, т. е. при $t = nT$, по выражению (28.5) имеем

$$q = \frac{S}{a\omega} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(n-k)\rho T. \quad (28.6)$$

Вывод выражений (28.5) и (28.6) прост и ясен, а на вид может показаться даже приквашивальным своей излишней компактностью. Однако наша цель была совсем другая, как только мы идём к процедуре необходимых выводов и представим себе их обмен. Пусть, например, прямо определить движение в интервале времени $[99T, 100T]$ и найти отклонение через каждую десятую часть этого интервала, т. е. в моменты $t_0 = 99T, t_1 = 99,1T, t_2 = 99,2T, \dots, t_9 = 99,9T, t_{10} = 100T$. Согласно выражению (28.5) нам придется вычислять одинаковую сумму

$$q_0 = \frac{S}{a\omega} \sum_{k=0}^{99} \sin(99-k)\rho T, \\ q_1 = \frac{S}{a\omega} \sum_{k=0}^{99} \sin(99,1-k)\rho T, \\ \dots \\ q_{10} = \frac{S}{a\omega} \sum_{k=0}^{99} \sin(100-k)\rho T, \quad (28.7)$$

в каждую из которых входит сто слагаемых.

После этого мы сможем описать (и притом не очень подробно) движение лишь в течение одного периода $[99T, 100T]$. Для любого другого периода нужно все делать заново. Однако есть еще одна неприятная сторона этих выводов, существующая даже при выполнении на ЭВМ. Дело в том, что среди членов каждой из сумм имеются как положительные, так и отрицательные; это заставляет вести вычисления с большим числом учитываемых значащих цифр.

Хотя эти неудобства описанного способа очевидны, но мы пока воздерживаемся от окончательных оценок: нужно еще

Посмотреть, каковы достоинства и недостатки других способов.

Второй способ. В общем случае действие произвольной возмущающей силы $P(t)$ решается имеет вид (27.18) (в предыдущем параграфе мы подробно говорили о физической сущности этого решения), или

$$q = A \cos pt + B \sin pt, \quad (28.8)$$

где

$$A = -\frac{1}{\omega^2} \int_0^t P(\tau) \sin p\tau d\tau, \quad (28.9)$$

$$B = \frac{1}{\omega^2} \int_0^t P(\tau) \cos p\tau d\tau.$$

Теперь возьмем, что в моменты времени $0, T, 2T, \dots$ к системе прикладываются одинаковые импульсы S . Тогда для интервала времени $[nT, (n+1)T]$ по выражениям (28.9) находим

$$A = -\frac{S}{\omega^2} [\sin pT + \sin 2pT + \dots + \sin npT], \quad (28.10)$$

$$B = \frac{S}{\omega^2} [1 + \cos pT + \cos 2pT + \dots + \cos npT]. \quad (28.11)$$

Этим выражениям можно придать более компактный вид путем следующих преобразований. Умножив сумму, входящую в выражение (28.10), на $2 \sin \frac{pT}{2}$ и зная ряд тригонометрических равенств

$$2 \sin \frac{pT}{2} \sin pT = \cos \frac{pT}{2} - \cos \frac{3pT}{2},$$

$$2 \sin \frac{pT}{2} \sin 2pT = \cos \frac{3pT}{2} - \cos \frac{5pT}{2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$2 \sin \frac{pT}{2} \sin npT = \cos \frac{(2n-1)pT}{2} - \cos \frac{(2n+1)pT}{2}.$$

Сложив все эти равенства, получим вместо выражения, стоящего в скобках формулы (28.10),

$$\frac{\cos \frac{pT}{2} - \cos \frac{(2n+1)pT}{2}}{2 \sin \frac{pT}{2}} = \frac{\sin \frac{n+1}{2} pT - \sin \frac{n}{2} pT}{\sin \frac{pT}{2}}.$$

Аналогично этому, выражению, стоящему в скобках формулы (28.11), можно придать форму

$$\frac{\sin \frac{(2n+1)pT}{2} - \sin \frac{pT}{2}}{2 \sin \frac{pT}{2}}.$$

Совместив формулы (28.10), (28.11) приобретает вид

$$A = -\frac{S}{\omega^2} \frac{\sin \frac{n+1}{2} pT - \sin \frac{n}{2} pT}{\sin \frac{pT}{2}},$$

$$B = \frac{S}{\omega^2} \frac{\sin \frac{(2n+1)pT}{2} - \sin \frac{pT}{2}}{\sin \frac{pT}{2}}. \quad (28.12)$$

Таким образом, для определения движения на любом интервале нет необходимости в упоминательном суммировании, которое требуется в первом способе; нужно лишь предварительно найти числа A и B по формулам (28.12), а затем воспользоваться весьма простым выражением (28.8).

Тем не менее рассмотренный способ все же содержит один существенный недостаток.

Поскольку решение, данное в выражениях (28.8) и (28.12), не является периодическим и меняется от одного периода к другому (в эти выражения входит номер n), то для полного описания движения придется повторять вычисления заново для каждого нового периода. Это тем более досадно, что, по-видимому, главной частью движения несомненно является периодический процесс, называемый упругой системой импульсами, повторяющийся с периодом T .

Чем объяснить, что вычисленное решение не обнаруживает такой периодичности? Ответ на этот вопрос звучит несколько парадоксально: это решение слишком точное — в нем содержится не только описание стационарного колебательного процесса с периодом T , но и отражено влияние начальных условий, которое в действительности из-за упругих сопротивлений силы быстро затухает. Кажется, что это явление и стационарному процессу вообще не имеет быть исключений, поскольку исходное уравнение конечно для строго упругой системы, лишенной упругих сопротивлений.

Можно ли вообще получить чисто периодическое решение, если опираться именно на это уравнение, т. е. не вводить в уравнение члены, выражающие демпфирование? Да, можно, как это показывают два следующих способа решения.

Третий способ. Рассматриваемая нами система линейна, и этим определяется законность принципа наложения, которым мы пользовались выше, когда добавляли к действию первого импульса действие второго импульса, затем третьего импульса и т. д. Однако этот принцип может быть применен по-иному. Произвольную периодическую силу $P(t)$ с периодом T можно представить в виде бесконечной суммы гармоник с периодами $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \dots$, т. е. в виде ряда Фурье:

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T}. \quad (28.13)$$

Идея решения состоит в том, чтобы сначала найти движения, вызываемые каждой из гармоник, а затем — опираясь на принцип наложения — просуммировать эти элементарные решения. Для вычисления коэффициентов a_n и b_n следует воспользоваться формулами Фурье:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (28.14)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

В рассматриваемом случае действия периодических мгновенных импульсов имеем

$$\int_0^T P(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} P(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt = S_n,$$

$$\int_0^T P(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} P(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt = 0$$

и по формулам (28.14) находим

$$a_n = \frac{2S_n}{T}, \quad b_n = 0.$$

Таким образом,

$$P(t) = \frac{S}{T} + \frac{2S}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n t}{T}, \quad (28.15)$$

и нам придется иметь дело не с мгновенными импульсами, а с бесконечной суммой, входящей в выражение (28.15); общий член суммы имеет вид $\frac{2S}{T} \cos \frac{2\pi n t}{T}$.

Рассмотрим движение, которое вызывается действием только одного такого слагаемого. Для этого нужно решить дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + p^2 q_n = \frac{2S}{aT} \cos \frac{2\pi n t}{T}. \quad (28.17)$$

Частное решение (не связанное с начальными условиями) имеем в виде

$$q_n = A_n \cos \frac{2\pi n t}{T}. \quad (28.18)$$

Амплитуду A_n можно найти путем подстановки решения (28.18) в уравнение (28.17):

$$\left(-\frac{2\pi n}{T}\right)^2 A_n + p^2 A_n = \frac{2S}{aT},$$

откуда следует

$$A_n = \frac{2S}{aT \left[p^2 - \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 \right]}. \quad (28.19)$$

Таким образом, решение (28.18) имеет вид

$$q_n = \frac{2S}{aT \left[p^2 - \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 \right]} \cos \frac{2\pi n t}{T}. \quad (28.20)$$

Суммируя отдельные решения типа (28.20), т. е. складывая поэлементно, вызываемые каждой из гармоник ряда (28.15), находим для одного периода

$$q = \frac{S}{ap^2 T} + \frac{2S}{aT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi n t}{T}}{p^2 - \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2}. \quad (28.21)$$

Здесь первый член соответствует первому слагаемому S/T в выражении (28.15). Хотя решение (28.21) требует суммирования бесконечного ряда, но этот недостаток не может заслонить, насколько достоинство решения (28.21) — его однозначность, благодаря которой достигшим можно

движение в течение всего лишь одного периода. Это свойство решения (28.21) выгодно отличает его от непериодических решений, полученных двумя первыми способами.

Следует углубиться в причины, которые позволили получить желаемое периодическое решение, и ответить на два вопроса:

1. Каким образом удалось исключить, впрямую, периодичность?

2. Является ли полученное здесь решение более точным, чем решения, найденные двумя ранее рассмотренными способами, или, наоборот, менее точным?

Ответ на первый вопрос прост. Ведь решение (28.18) уравнения (28.17) представляет только чисто периодическую (с периодом T) часть движения, так как в данном решении заведомо отбрасываются те члены полного решения, которые могли бы нарушить эту периодичность.

Отсюда, казалось бы, вытекает в ответ на второй вопрос: найденное решение (28.21) не является точным решением задачи, так как нами не приняты во внимание начальные условия. Но в действительности из-за действия дифференцируя факторы (исключенные при составлении уравнения движения) начальные условия влияют на процесс движения лишь очень слабо и после некоторого небольшого числа периодов процесс приобретает стационарный характер, и последующее движение будет практически повторяться от периода к периоду. Можно сказать, что, рассматривая только периодическое решение, мы компенсируем его неполноту самого уравнения. С этой неформальной, но, очевидно, разумной точки зрения решение (28.21) точнее отражает истинные закономерности, чем полученные выше два других решения.

Четвертый способ. После всего сказанного выше трудно представить себе, что возможно столь счастливое сочетание достоинств компактности и периодичности, как в рассмотренном здесь четвертом способе.

Рассмотрим какой-либо один из периодов T , приняв за начало отсчета времени момент исчезновения последнего импульса. В течение рассматриваемого периода колебания являются свободными и описываются решением

$$q = A \cos pt + B \sin pt \quad (0 < t < T). \quad (28.22)$$

Если q_0 — начальное смещение и \dot{q}_0 — начальная скорость, то постоянные A и B равны

$$A = q_0, \quad B = \frac{\dot{q}_0}{p}. \quad (28.23)$$

решение (28.22) можно записать в виде

$$q = q_0 \cos pt + \frac{\dot{q}_0}{p} \sin pt \quad (0 < t < T). \quad (28.24)$$

Дифференцируя по времени t , находим скорость

$$\dot{q} = -q_0 p \sin pt + \dot{q}_0 \cos pt. \quad (28.25)$$

В конце этого периода, непосредственно перед приходом очередного импульса (т. е. при $t=T$), имеем

$$q_1 = q_0 \cos pT + \frac{\dot{q}_0}{p} \sin pT, \quad (28.26)$$

$$\dot{q}_1 = -p q_0 \sin pT + \dot{q}_0 \cos pT. \quad (28.27)$$

Сразу после прихода очередного импульса смещение q сохранит свое значение (28.26):

$$q_2 = q_1 = q_0 \cos pT + \frac{\dot{q}_0}{p} \sin pT, \quad (28.28)$$

но скорость мгновенно изменится на величину S/p и при учете выражения (28.27) составит

$$\dot{q}_2 = -p q_0 \sin pT + \dot{q}_0 \cos pT + \frac{S}{p}. \quad (28.29)$$

Хотя эти выкладки просты, но невозможно, что читатель еще не уловил, с какой целью они сделаны. Все станет ясным после следующего решающего шага: вследствие предположенной периодичности процесса величины q_2 и \dot{q}_2 должны быть равны соответственно величинам q_1 и \dot{q}_1 , т. е.

$$q_2 = q_1 = q_0 \cos pT + \frac{\dot{q}_0}{p} \sin pT, \quad (28.30)$$

$$\dot{q}_2 = -p q_0 \sin pT + \dot{q}_0 \cos pT + \frac{S}{p}. \quad (28.31)$$

Таким образом, мы получили систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными q_0 и \dot{q}_0 ; решив ее, найдем

$$q_0 = \frac{S}{2pg} \operatorname{ctg} \frac{pT}{2}, \quad \dot{q}_0 = \frac{S}{2g}. \quad (28.32)$$

и закон движения (28.22) принимает вид

$$q = \frac{S}{2gp} \left(\sin pt + \cos pt \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \right) \quad (0 < t < T). \quad (28.33)$$

И все? Да, это окончательное выражение исчерпывающим образом решает задачу. Здесь нет конца (как в спо-

годе 1) или бесконечных (как в способе 3) сумм; от способа 2 это решение выгодно отличается своей пригодностью. Достаточно построить закон движения для одного периода; в следующих периодах движение будет полностью повторяться.

Как мы уже видели выше, периодичность достигнута вследствие игнорирования заданных начальных условий (т. е. условий, относящихся к началу импульса), непосредственно перед приложением первого импульса; в реальных системах благодаря демпфированию (которое в уравнении (28.22) не было нами учтено) в конце каждого осуществления является именно такое периодическое движение.

Впрочем, при желании можно ограничить в решении и действительно заданные начальные условия. Пусть в начальный момент времени заданное смещение и скорость соответственно составляют q_0^* и \dot{q}_0^* . Конечно, они отличаются от величин q_0 и \dot{q}_0 , которые относятся к чисто периодическому процессу и даны выражениями (28.32). Запишем тогда:

$$\begin{aligned} q_0^* &= q_0 + \left(q_1' - \frac{S}{2\omega p} \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \right), \\ \dot{q}_0^* &= \dot{q}_0 + \left(\dot{q}_1' - \frac{S}{2\omega} \right). \end{aligned} \quad (28.34)$$

Первые слагаемые правых частей отвечают периодическому (с периодом T) движению (28.33), а вторые слагаемые описывают аperiodичную свободную колебаний (с периодом $2\pi/p$)

$$q^* = \left(q_1' - \frac{S}{2\omega p} \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \right) \cos pt + \left(\frac{\dot{q}_1'}{p} - \frac{S}{2\omega p} \right) \sin pt. \quad (28.35)$$

Здесь, в отличие от (28.33), время t отсчитывается от заданного начала процесса. Таким образом, движение будет описываться надложками образованной (с учетом различия в началах течения времени) суммой решений (28.33) и (28.35). Еще раз повторим, что вторая часть имеет практическое значение в течение небольшого промежутка времени от начала процесса.

Из этого можно было бы закончить рассказ, но полезно хотя бы кратко проанализировать результат, содержащийся в выражении (28.33).

Прежде всего заметим, что если $pT/2 = n\pi$ (где n — целое), то $\left| \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \right| \rightarrow \infty$ и амплитуды перемещений стремятся к бесконечности, т. е. наступает ударный резонанс. Если

$\omega = 2n/T$ — угловая частота приложения импульса, то условие ударного резонанса приобретает вид

$$\omega = \frac{2}{n} p. \quad (28.36)$$

При всех иных соотношениях частот отклонения оказываются конечными. Наибольшее отклонение системы согласно (28.33) равно

$$q_{\max} = \frac{S}{\omega p} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{pT}{2}} = \frac{S}{2\omega p} \left| \operatorname{csc} \frac{pT}{2} \right|. \quad (28.37)$$

Так как дробь $S/(\omega p)$ есть максимальное отклонение, вызываемое одним мгновенным импульсом S , то выражение

$$\beta = \frac{1}{2 \left| \operatorname{csc} \frac{pT}{2} \right|} \quad (28.38)$$

можно назвать коэффициентом влияния периодичности. На рис. 28.1 изображена зависимость β от отношения частот



Рис. 28.1. Коэффициент влияния периодичности импульса

и/р. Как видно, здесь возможно неограниченно большое число ударных резонансов (соответственно формуле (28.36)). Наибольшее возможное значение β равно $1/2$.

В заключение нужно отметить, что основная идея, лежащая в основе изложенного варианта, с тем же успехом может быть применена и в более общем случае — когда внешнее возмущение представляет собой периодическую силу, с любым законом изменения в течение периода.

Выбирая периодичность изложенный вариант резонанса, мы сознательно игнорировали аperiodический процесс.

Почти по этому же способу можно найти в книге Н. К. Сивова «Динамика сооружений» (М.: Гостройиздат, 1950, с. 40). Второй способ был предложен А. Н. Крыловым (см. его книгу «Вибрации судов», — М.: СМТИ, 1936, § 15-2); графический метод явился суммированием см. в книге Г. С. Герасима «Вибрации и колебания» (М.: Физматгиз, 1959, с. 11, § 5). В книге С. А. Бердника «Общая динамика сооружений» (М.: Гостройиздат, 1938, § 24) тот же способ применен к задаче о вращении периодической импульса конечной продолжительности в заданном

система гамильтона эффекта. Какое бы, что эту задачу можно решить методом предельного перехода отвести в случае действия ивлективных импульсов, однако найденный С. А. Барашевым результат совершенно ошибочен — в выкладках пропущено, что при любых целых числах n и k если $(2n-1)k = -1$, так как и $(2m-1)k =$ нецелые число ϕ , [12].

Третий способ непосредственно применяется только авторами для задачи о действиях периодической возмущающей гами системы тогда, но может применяться достаточно этот способ обладает как бы некоторой (например, при анализе колебаний аналитический анализ действий возмущающей системы).

Четвертый способ был предложен в НИИ Г. Дурфалом для общего случая действия периодической возмущающей силы и с учетом важного соотношения выдвигается по всей длине книги А. Г. Лобановского и А. Н. Луры «Курс теоретической механики» (см., например, 6-е изд., М.: Наука, 1964, § 184). Стараясь не придумывать там решение, можно перейти и в случае действия периодической возмущающей системы без предельного перехода, в упомянутом издании этот частный случай рассмотрен в выкладки (см. с. 78—81). См. также «Курс теоретической механики» И. М. Рыбковича, т. 2 (М.: Гостехиздат, 1964), где рассуждения в этом направлении имеют действительные выкладки выкладки условий в некоторых выражениях (28.25).

«Математическое автобиографическое» Н. Г. Чеботарина см. в журнале «Ученые и технические вестники» (1968, 1, 3, № 4 (20)).

Впервые при помощи такой задачи в фазовом пространстве выдвигается (28.27), выдвигается выкладки — нецелые выкладки выкладки было выкладки выкладки. Этот выкладки, в выкладки еще выкладки, выкладки, более определенно авторскому тексту (в § 4) было рассмотрено статьи У. Риттенберга «Sur la stabilité des systèmes hamiltoniens et de quelques variantes» (Annales des École Polytechnique série II de physique, Paris, I sem., 1970).

§ 29. Об «обратной» форме дифференциальных уравнений колебаний

Уравнения Лагранжа представляют собой наиболее общую форму записи дифференциальных уравнений колебаний механических систем со многими степенями свободы. Пусть рассматривается консервативная система с n степенями свободы, причем q_i — обобщенные координаты, a_{ik} — инерционные коэффициенты и c_{ik} — коэффициенты жесткости. Кинетическая и потенциальная энергии равны

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k \quad (29.1)$$

Соответственно уравнения Лагранжа приобретают форму

$$\sum_{i=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_i + c_{ik} q_i) = Q_k \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (29.2)$$

где Q_k — обобщенные силы, вычисляются заданными функциями времени (вынуждающие силы).

Соответствующим выбором обобщенных координат можно добиться определенных упрощений системы (29.2). Отметим два важных частных случая.

1. Обобщенные координаты выбраны таким образом, что $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$; тогда

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ii} \dot{q}_i^2 \quad (29.3)$$

и дифференциальные уравнения (29.2) принимают вид

$$a_{ii} \ddot{q}_i + \sum_{k=1}^n c_{ik} q_k = Q_i \quad (29.4)$$

2. Обобщенные координаты таковы, что выражение потенциальной энергии не содержит произвольной координат:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{ii} q_i^2 \quad (29.5)$$

т. е.

$$c_{ik} = 0, \quad \text{если } i \neq k.$$

Дифференциальные уравнения (29.2) записываются в форме

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} \ddot{q}_i + c_{ik} q_i = Q_k \quad (29.6)$$

Первая форма уравнений (29.4) называется прямой, а вторая форма (29.6) — обратной. Прямая форма характеризруется тем, что в каждое дифференциальное уравнение входит только по одному члену, содержащему обобщенное ускорение \ddot{q}_i ; в противоположность этому в каждое из уравнений, записанных в обратной форме, входит только по одному члену, содержащему обобщенную координату q_i .

В литературе, посвященной колебаниям конкретных типов механических систем, можно встретить обе формы записи, но их получают, как правило, минуя процедуру составления уравнений Лагранжа. Никто не проверял ни порядка, как это обычно делается, но сейчас отметим, что обе формы, конечно, принципиально эквивалентны друг другу. В то же время для каждой конкретной механической системы предпочтительнее, по соображениям чисто вычислительного характера, может быть отдано той или иной форме.

Обратимся к примерам. Первый пример — массивированная рис. 29.1, а и представляет собой цепочку упруго связанных грузов, способная совершать колебания вдоль горизонтальной прямой. На чертеже обозначено: m_i, m_2, \dots, m_n — массы грузов, c_1, c_2, \dots, c_n — коэффициенты жесткости пружин, $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ — заданные вынуждающие силы. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — отклонения грузов от

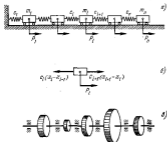


Рис. 29.1 Схемы и составленные дифференциальные уравнения движения в прямой форме

положения равновесия. Тогда сила упругости, равновешивающая в i -й пружине и действующая на i -й груз, запишется в виде $c_i(x_i - x_{i-1})$. Выделив i -й груз, запишем для него дифференциальное уравнение движения (рис. 29.1, б):

$$P_i + c_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - c_i(x_i - x_{i-1}) = m_i \ddot{x}_i \quad (29.7)$$

(конечно, в последнем уравнении, т. е. для $i=n$, следует принять $c_{n+1} = 0$). Таким образом, мы пришли к дифференциальным уравнениям в прямой форме. Это будет получаться всегда, когда мы будем записывать дифференциальные уравнения движения координат в систему твердых тел, приняв в качестве обобщенных координат перемещения или углы поворота в углы поворота вокруг центров тяжести; действительно, при таком выборе обобщенных координат кинетическая энергия будет записываться в форме (29.3).

Прямая форма удобна в тех случаях, когда упругие силы по-прежнему выражаются через обобщенные координаты. В частности, это относится к системам цепного типа. Например, для многодисковой системы, совершающей крутильные колебания (рис. 29.1, в), можно прийти к той же форме записи (29.7), если принять за координаты углы поворота дисков и записать дифференциальные уравнения параллельного движения для каждого из них. Конечно, в

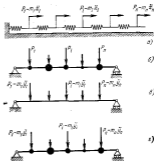


Рис. 29.2 Схемы и составленные дифференциальные уравнения движения в обратной форме

данном случае вместо P_i следует подставить возмущающие моменты M_i , вместо линейных смещений x_i — углы поворотов дисков φ_i , вместо m_i — моменты инерции дисков J_i , наконец, вместо c_i — коэффициенты жесткости участков вала.

Однако вернемся к системе, изображенной на рис. 29.1, а. Для получения обратной формы дифференциальных уравнений нужно по-прежнему отделить грузы, но затем рассмотреть не их, а оставшийся после отделения безмассовый упругий скелет системы (рис. 29.2, а), нагруженный или заданными возмущающими силами P_i , так и силами отделившихся масс — $m_i \ddot{x}_i$.

Обозначим через δ_{ik} статический коэффициент влияния (единичное перемещение), т. е. перемещение точки i под действием единичной силы, приложенной в точке k . В рассмотренном случае

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^i \frac{1}{c_j}, \quad \text{если } k > i;$$

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{c_j}, \quad \text{если } k < i. \quad (29.5)$$

Полное перемещение i -й точки определяется путем сложения перемещений, вызываемых каждой из сил, приложенных в упругому скелету, и, следовательно, имеет вид

$$x_i = \sum_{k=1}^n (P_k - m_k \ddot{x}_k) \delta_{ik}. \quad (29.6)$$

Как видно, этот путь рассуждений приводит к обратной форме дифференциальных уравнений движения.

Этой формой особенно часто пользуются при исследовании малых колебаний стержней, несущих ряд сосредоточенных масс. На рис. 29.2, б изображена система такого типа, а на рис. 29.2, в — ее упругий скелет, в котором (подобно схеме на рис. 29.2, а) одинаково приложены наружные силы и силы инерции обобщенных грузов. В данном случае дифференциальные уравнения движения имеют ту же обратную форму (29.6). Удобства этой формы системы в том, что для вычисления коэффициентов влияния существуют хорошо разработанные приемы (формула Мора, формула Верещагина и т. п.).

Таким образом, существуют две, можно сказать, противоположные отправления позиции для составления дифференциальных уравнений колебаний. В обоих случаях предполагается мысленное рассечение системы путем выделения обладающих массой грузов от упругого скелета системы. Но в первом случае записываются законы движения грузов, и во втором случае — зависимость, определяющая движение безмассового упругого скелета; соответственно первый путь приводит к прямой форме дифференциальных уравнений движения, а второй путь — к обратной форме этих уравнений.

Подробнее остановимся на второй схеме рассуждений, где речь идет о действии вполне реальных сил $P_k - m_k \ddot{x}_k$ на упругий скелет конструкции, т. е. на освобожденную от масс систему связей. Хотя понятие о безмассовом скелете со-

держит в себе некоторый элемент искусственности, но, в сущности, точно согласуется с основными представлениями механики несвободных систем.

Отметим, что в методе кинестатики обычно говорится об условиях приложения фиктивных сил инерции $m \dot{v}$ и a в n системы; для рассмотренной выше балки это иллюстрировано рис. 29.2, а. Конечно, такой подход не приводит к каким-либо ошибкам в уравнениях; однако он не действует существом дела и, пожалуй, лишь затмевает ясную картину, иллюстрированную рис. 29.2, в, где показано действие реальных сил на систему реальных связей.

Почти полвека назад Е. Л. Николаи писал: «Будь ли можно назвать другую теорему механики, которая называлась бы емкостью всякого рода недоразумений, как начало Даламбера. Реальны или фиктивны те силы инерции, о которых говорится в этом начале? Если их нужно считать фиктивными, то каким же образом могут эти силы инерции быть причиной таких совершенно реальных явлений, как разрыв механизма или стоек и реальных и крушение поездов и т. д.? Вот вопросы, которые вызывают несчетные споры, — и не только среди начинающих изучать механику».

Нынче положение в этом отношении улучшилось: в ряде современных учебников механики названные вопросы рассмотрены самым исчерпывающим образом. Однако в технической литературе, посвященной прикладным вопросам, необходима четкость изложения встречается далеко не часто. Авторам этой книги кажется, что понятие об упругом безмассовом скелете *) (или, короче, конструкции) может помочь достаточно большой ясности; без этого понятия рассуждения чаще всего оказываются несколько двусмысленными.

Конечно, это относится не только к задачам в механике, но и вообще к любым задачам динамики механических систем. Когда в расчетах прочности звенящих конструкций пишут, что при выполнении какой-либо операции на самолете действуют силы инерции, то это бесспорно негодный оборот речи, поскольку силы инерции не действуют на самолет, представляющий собой совокупность внутренних связей (скелета) и масс, распределенных по его объему. Правда, большинство авторов добавляет в подобные обороты речи ссылку на принцип Даламбера; этим,

*) Разумеется, что этот термин удавлен, в сущности, роль идет в системе уравнений связей.

покажут, достигается формальная независимость груза, но жесткость вынуждает вылететь.

В то же время выражение «при выполнении какой-либо функции самолета на его сдвальной кривой» действия силы инерции не содержит двусмысленности и совершенно точно соответствует существу дела; именно на эти силы, как на внешнюю нагрузку, и производится расчет прочности конструкции. Слово, понятие механической системы и ее безмассового каркаса следует различать.

О двух формах дифференциальных уравнений колебаний см. книгу Н. Я. Бобинева «Теория колебаний» §-а и г-а, М.: Наука, 1969. Также Е. Л. Николаев «Об анализе Даламбера и сил инерции» в его книге «Труды по механике» (М.: Гостехиздат, 1953, с. 407—446). С большой актуальностью вопрос о силах инерции обсужден в работе А. Н. Крылова «О силах инерции в привазах Даламбера».

§ 30. Антирезонанс

Невозможно себе представить, чтобы при действии статической силы, приложенной к упруго закрепленному грузу (рис. 30.1, а), он оставался бы на месте. Конечно,



Рис. 30.1. Действие силы P на систему с одной и двумя степенями свободы

это также невозможно и в случае более сложной системы, например, изображенной на рис. 30.1, б.

Совершенно по-другому обстоит дело в динамических задачах. Так, например, если сила гармонически изменяется во времени

$$P = P_0 \sin \omega t, \quad (30.1)$$

то при некоторых условиях точка приложения силы окажется все время неподвижной; правда, это может быть лишь, если система имеет по крайней мере две степени свободы (рис. 30.1, б). Это удивительное явление представляет не только очевидный теоретический интерес, но может быть использовано и в практических целях.

Рассмотрим вынужденные колебания двухмассовой системы, изображенной на рис. 30.1, б. Если обозначать через m_1 и m_2 массы обоих грузов, а через c_1 и c_2 — коэффициенты

жесткости обеих пружин, то дифференциальные уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} -c_1 x_1 + c_1 (x_2 - x_1) + P_0 \sin \omega t &= m_1 \ddot{x}_1, \\ -c_2 (x_2 - x_1) &= m_2 \ddot{x}_2, \end{aligned} \quad (30.2)$$

где $x_1 = x_1(t)$ и $x_2 = x_2(t)$ — перемещения грузов. Система уравнений (30.2) удовлетворяется решениями

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \quad x_2 = A_2 \sin \omega t, \quad (30.3)$$

означающими, что колебания происходят с частотой ω возмущающей силы. Разумеется, это лишь частное решение, но оно описывает наиболее важную, стационарную часть процесса; другая часть решения, описывающая колебания с собственными частотами, быстро исчезает вследствие действия неизбежных сил трения.

Подставляя (30.3) в (30.2), получаем для алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний

$$\begin{aligned} -A_1 c_1 \omega^2 + c_1 A_2 - c_1 (A_2 - A_1) &= P_0, \\ -A_2 c_2 \omega^2 + c_2 (A_2 - A_1) &= 0. \end{aligned} \quad (30.4)$$

Решив эту систему, найдем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{P_0 (c_2 - c_1 \omega^2)}{(c_1 + c_2 - c_1 \omega^2)(c_2 - c_1 \omega^2) - c_1^2}, \\ A_2 &= \frac{P_0 c_2}{(c_1 + c_2 - c_1 \omega^2)(c_2 - c_1 \omega^2) - c_1^2}. \end{aligned} \quad (30.5)$$

Конечно, амплитуды колебаний обоих грузов существенно зависят от частоты ω возмущающей силы. Так, в частности, при определенных значениях параметров c_1 и c_2 в выражениях (30.5) обращаются в нуль, а величины A_1 и A_2 стремятся к бесконечности; это означает возникновение резонанса в системе. Таких значений частоты — два, и они могут быть найдены из уравнения

$$(c_1 + c_2 - c_1 \omega^2)(c_2 - c_1 \omega^2) - c_1^2 = 0. \quad (30.6)$$

Эти резонансные частоты в точности равны собственным частотам рассматриваемой системы. Резонансные свойства упругих систем широко известны, и мы их обсуждать не будем.

Остановимся на другом свойстве системы, связанном с возможностью обращения в нуль числителя первой из формул (30.5). Если частота возбуждения удовлетворяет

равенству

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}, \quad (30.7)$$

то по формулам (30.5) находим

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{P_2}{c_2}. \quad (30.8)$$

Особенного внимания заслуживает равенство $A_1 = 0$: первая масса остается неподвижной, хотя именно к ней

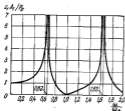


Рис. 30.2. Зависимость безразмерной амплитуды от безразмерной частоты возбуждения.

приложена вынуждающая сила. Это и есть тот удивительный эффект, который невозможен в статических задачах. Иногда состояние системы при $\omega = \omega_0$ называют антирезонансом.

На рис. 30.2 показано изменение амплитуды A_1 в зависимости от частоты возбуждения ω , если $P_1 = 1$, $c_1 = -c_2 = 1$, $m_1 = m_2 = 1$. Здесь отчетливо виден антирезонанс при $\omega = \omega_0$, а также два резонанса — при $\omega = 0,5$ и при $\omega = 1,5$.

Возможность антирезонанса практически используется при устройстве динамических гасителей колебаний. Пусть, например, имеется одномассовая система (рис. 30.1, а), в которой приложена гармоническая вынуждающая сила (30.1). В этой одномассовой системе колебания массы неизбежны при любых параметрах системы. Однако если к ней к систему дополнительной груз на упругой связи, то

получается изображение на рис. 30.1, б двухмассовая система, и, как мы только что видели, колебания основной (первой) груза полностью исчезнут, если параметры c_1 и m_2 дополнительной части системы подобраны согласно условию (30.6). В этом случае второй груз выполняет роль динамического гасителя колебаний для основной системы.

При дополнительной настройке виброгасителя, когда исчезают колебания основной конструкции, дополнительной груз, как правило, набравает очень сильны. Амплитуда A_2 колебаний гасителя равна относительно амплитуды вынуждающей силы P_2 жесткости дополнительной пружины. Но для того чтобы можно было обойтись малым значением массы гасителя m_2 по условию настройки (30.7) необходима также малая жесткость c_2 ; при этом, естественно, возникают большие амплитуды колебаний массы гасителя. Впрочем, чем выше значение частоты ω , на которую настроен гаситель, тем большим должно быть значение жесткости c_2 при данном значении m_2 , и согласно (30.8) амплитуда колебаний гасителя уменьшается. Следовательно, чем больше частота настройки ω , тем компактнее конструкция виброгасителя.

Идея динамического виброгасителя, бесспорно, увеличительна и может даже показаться, что и ей следует искать аналогию от всяких нежелательных явлений. К сожалению, у динамического виброгасителя есть один серьезный недостаток: он способен гасить колебания лишь строго фиксированной частоты ω . Малое изменение частоты возбуждения вызовет нарушение условия (30.7) и дополнительная часть системы утратит свойства гасителя; возможно даже, что условия работы основной системы не улучшатся, а ухудшатся.

На рис. 30.2 видно, что вторая масса гасит колебания лишь в одной определенности частоты $\omega = \omega_0$. Если же, например, частота возмущения составит $\omega = 0,5$, то возникнет резонанс, которого не было бы при отсутствии такого гасителя (наименее здесь поставлены не случайно).

Пусть введен в систему гаситель второго сорта — можно можно несколько расширить диапазон частот, внутри которого происходит интенсивное гашение колебаний. По-прежнему когда в колебательную систему встраивается гаситель, он обычно снабжается демпфирующим элементом с надежным диссипирующим видом сопротивления.

Существует несколько типов р е г у л и р у е м ы х виброгасителей, рассматривая их системы с малой частотой возбуждения. Основная идея этих устройств сле-

тит в автоматическом изменении собственной частоты гасителя при изменении частоты возмущающей силы; для этой цели используются специальные схемы автоматического регулирования. Регулируемые виброгасители сложны, но зато обеспечивают успешную борьбу с вибрациями в широком диапазоне частот возмущающей силы.

Впрочем, в некоторых случаях сдвигая настройку обеспечивается самой системой без всяких-либо дополнительных устройств. Этим свойством обладают, например, маятниковые гасители колебаний колесных валов двигателей внутреннего сгорания. При изменении угловой скорости вращения вала пропорционально изменяются частоты гармонических составляющих возмущения, и от гасителя (обычно предназначенного для гашения наиболее вредной составляющей) требуется соответственное изменение его собственной частоты; такое изменение происходит само собой, поскольку маятник находится в поле центробежных сил.

Иногда динамические гашение оказывается неожиданным и случайным результатом присоединения к системе дополнительных грузов, основное назначение которых не имеет ничего общего с задачей гашения колебаний. В одной статье описывается любопытный случай установки виброметра на сравнительно легкую колеблющуюся систему для измерения ее вибрации. Экспериментаторы не без удивления заметили, что сразу после установки виброметра амплитуда колебаний заметно уменьшилась — виброметр неожиданно сыграл роль гасителя (любопытный пример действия измерительного прибора на течение изучаемого процесса). Разумеется, что в этих условиях стало невозможным полагаться на показания виброметра.

В заключение отметим, что с явлениями автоколебания

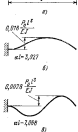


Рис. 30.3. а) Схема балки; б) первая автоколебательная форма; в) вторая автоколебательная форма

можно встретиться и при анализе вынужденных колебаний систем с распределенными параметрами. Примером могут служить вынужденные колебания консольной балки, закрепленной в сечении $x=0$ и нагруженной на конце $x=l$ сосредоточенной силой $P_0 \sin \omega t$ (рис. 30.3, а). Если обозначить: EJ — жесткость балки при изгибе, m — интенсивность распределенной массы, $v(x, t)$ — отклонение произвольного сечения балки от положения равновесия, то для установившегося процесса можно найти

$$v(x, t) = \{ P_0 [\text{ch } \alpha l + \cos \alpha l] (\text{sh } \alpha x - \sin \alpha x) - (\text{sh } \alpha l + \sin \alpha l) (\text{ch } \alpha x - \cos \alpha x) \} \sin \omega t \times \times [2\alpha^2 EJ (\text{ch } \alpha l \cos \alpha l + 1)]^{-1/2},$$

где $\alpha^2 = m\omega^2/(EJ)$. В частности, для случая свободного конца имеем

$$v(l, t) = \frac{P_0 (\text{sh } \alpha l \cos \alpha l - \text{ch } \alpha l \sin \alpha l)}{\alpha^2 EJ (\text{ch } \alpha l \cos \alpha l + 1)} \sin \omega t.$$

Отсюда видно, что если числитель последнего выражения обращается в нуль (при $\text{tg } \alpha l = -\text{th } \alpha l$, т. е. при $\alpha l = 3,927, 7,068, \dots$), правый конец балки остается все время неподвижным; при этом остальные точки оси, за исключением конечного числа узлов, будут совершать колебания. В целом эту несколько необычную ситуацию (неподвижна именно та точка, в которой прилагалась сила) можно назвать динамическим консольным сечением балки. На рис. 30.3, б и в показаны две формы колебаний (т. е. изогнутая ось балки в моменты, когда достигаются наибольшие отклонения от положения равновесия) для двух первых автоколебаний; для ясности рисунок принят в разные масштабы отклонений по вертикали.

Случай с виброметром, который описан в глоссарии колебаний, описан в статье И. И. Клячкин «О влиянии виброметра на движение колеблющейся поверхности» (Автоматический журнал, 1959, № 1).

§ 31. Дестабилизирующее действие сил вязкого трения

Природа возникновения сил трения — неизбежная спутница любых колебательных процессов в реальных механических системах — разнообразна и сложна. Часто эти силы считают линейно-вязкими, т. е. пропорциональными скорости перемещений (или деформаций). Во многих случаях силы вязкого сопротивления играют чисто демпфирующую роль; благодаря этим силам происходит затухание свободных колебаний, уменьшаются амплитуды вынужденных

колебаний, расширяется область устойчивости. Не удивительно, что постепенно инженеры привыкли видеть в склад вязкого трения причину только деформации.

На этом фоне становится аксиологически позитивной ошибка, допущенная Лисом в работе, относящейся к 1923 г. Этот автор занимался исследованием устойчивости вращающегося гибкого вала, полагая, что материал вала обладает вязкоупругими свойствами. К этому времени было хорошо известно, что подобная система с идеально упругим валом устойчива при всех угловых скоростях вращения, кроме критических — в частности, в закруточной области. Записав правильные дифференциальные уравнения задачи, Лис не стал тщательно анализировать их решение, а ограничился, казалось бы, естественным, но опроверженным замечанием, что вязкое трение в материале должно способствовать затуханию возмущенного движения.

Очень скоро выяснилось, что это утверждение Лиса ошибочно. В 1924 г. Кимболл подробно рассмотрел свойства решений этой задачи и установил, что внутреннее вязкое трение деформирует колебания только при угловой скорости, меньшей критической, а в закруточной области оно играет противоположную роль и способствует раскачиванию колебаний. Теория Кимболла объяснила неожиданные экспериментальные результаты, полученные незадолго до этого Ньюкиром, когда была обнаружена неустойчивость вала не только при критической угловой скорости, но и в закруточной области¹⁾.

Если пренебречь второстепенными обстоятельствами, то вопрос может быть вынесен в несколько следующей упрощенной модели, исследованной в 1927 г. Е. Л. Николаем.

Диск массы m насажен посередине вращающегося вертикально двухшарнирного вала круглого сечения и полностью уравновешен на валу; в некоторый момент, от которого далее ведется отсчет времени, центр диска какому-либо образом отклонен от оси вращения Oz . Рассматривая последующий процесс движения, принимая, что вал только изгибается и не претерпевает деформации кручения

(рис. 21.1); кроме того, полагая, что угловая скорость вращения вала не остается все время постоянной при любых отклонениях центра диска (это предполагается наличием идеального двигателя, обеспечивающего постоянство ω).

Будем пользоваться неподвижной системой координатных осей x, y, z , причем ось z совмещена с осью, проходящей через центры подшипников. Обозначим через $u = u(t)$,

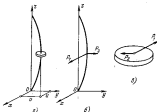


Рис. 21.1. а) Изгибная ось гибкого вала; б) силы, действующие на вал; в) силы, действующие на диск

$v = v(t)$ составляющие прогиба середины вала в направлении осей x и y . Мысленно отделим диск от вала и заменим действие диска на вал силами P_1 и P_2 , направленными параллельно осям x и y (рис. 21.1, б). Силы Q_1 и Q_2 , действующие на диск, показаны на рис. 21.1, в; эти силы равны по модулю и противоположны по направлению силам P_1 и P_2 . Дифференциальные уравнения движения диска имеют вид

$$m\ddot{u} = -P_1, \quad m\ddot{v} = -P_2. \quad (21.1)$$

В этих двух дифференциальных уравнениях содержится четыре неизвестные функции времени: $u(t)$, $v(t)$, $P_1(t)$ и $P_2(t)$. Для составления еще двух недостающих уравнений необходимо рассмотреть изгиб вала.

Обозначим через r радиус критичной оси вала в среднем его сечении. Проекции r на оси x и y обозначим через r_x и r_y (рис. 21.2, а). Соответствующие кривизны пропорциональны прогибам; методами сопротивления материалов

¹⁾ Впрочем, неосознанность утверждения Лиса вытекает из давно доказанной теоремы Кошиана о дестабилизующем влиянии дисбаланса сил, если устойчивость системы оценивается линейными методами. О дестабилизующем влиянии неэластичности вала вводит речь на диске также в § 28 в статье о неэластичной модели, authored Г. Шварцем. К сожалению, бывает, что в некоторых важных теориях величина истинности (а то и ее сразу лишь после того, как обнаружится какая-либо неадекватность — в теории или эксперименте).

можно найти

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{12}{l^2} \alpha, \quad \frac{1}{\rho_y} = \frac{12}{l^2} \beta. \quad (31.2)$$

Рассмотрим теперь среднее сечение вала (рис. 31.2, б) в совокупности с центром тяжести O_1 этого сечения подвижную систему осей x_1, y_1 , остающуюся все время параллельными

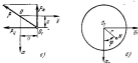


Рис. 31.2 а) Схема вала; б) поперечное сечение вала (оси x_1, y_1 параллельны неподвижным осям x, y)

неподвижным осям x, y . Некоторая точка N , удаленная от центра тяжести O_1 на расстояние r , имеет координаты

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad y_1 = r \sin \varphi, \quad (31.3)$$

причем согласно сказанному выше $\varphi = \omega t$.

Удлинение в точке N вследствие изгиба вала

$$e_x = -\frac{y_1}{\rho_x} - \frac{x_1}{\rho_y}, \quad (31.4)$$

Подставляя сюда (31.2) и (31.3), получим

$$e_x = -\frac{12r}{l^2} (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t). \quad (31.5)$$

Примем, что материал вала обладает изотропными свойствами, и обозначим: E — модуль упругости, k — коэффициент жесткости. Тогда нормальное напряжение в точке x_1, y_1 запишется в виде

$$\sigma_x = E e_x + k e_x = -\frac{12EJ}{l^2} (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t) - \\ - \frac{12kV}{l^2} (\alpha \cos \omega t - \alpha \sin \omega t + \beta \sin \omega t + \beta \alpha \cos \omega t). \quad (31.6)$$

Вновь возвращаясь к координатам x_1, y_1 , имеем

$$\sigma_x = -\frac{12EJ}{l^2} (E\alpha + k\alpha + k\beta) - \frac{12kV}{l^2} (E\beta + k\beta - k\alpha). \quad (31.7)$$

Система элементарных усилий $\sigma_x dF$ образует изгибающие моменты относительно осей x_1, y_1 :

$$M_x = - \int_{\Omega_1} \sigma_x y_1 dF = \frac{12J}{l^2} (E\alpha + k\alpha - k\beta), \quad (31.8)$$

$$M_y = - \int_{\Omega_1} \sigma_x x_1 dF = \frac{12J}{l^2} (E\beta + k\beta + k\alpha),$$

где J — момент инерции сечения вала относительно любой оси, проходящей через центр. Возвращаясь теперь к рис. 31.1, б, отметим, что изгибающий момент M_x вызван действием силы P_1 , а колеблющийся момент M_y — действием силы P_2 :

$$M_x = \frac{P_1 l}{4}, \quad M_y = \frac{P_2 l}{4}. \quad (31.9)$$

Приравняв правые части равенств (31.8) и (31.9), получим

$$P_1 = \frac{48J}{l^2} (E\alpha + k\alpha - k\beta), \quad (31.10)$$

$$P_2 = \frac{48J}{l^2} (E\beta + k\beta + k\alpha),$$

так что силы P_1 и P_2 зависят не только от самих переменных α и β , но и от скоростей $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$. Скобки в (31.10) и представляют собой два дополнительных дифференциальных уравнения, которые вместе с дифференциальными уравнениями (31.1) образуют замкнутую систему. Подставляя (31.10) и (31.1), получим дифференциальные уравнения движения центра тяжести диска

$$\ddot{\alpha} + p^2 \left(\alpha + \frac{k}{E} \alpha + \frac{k}{E} \omega \beta \right) = 0, \quad (31.11)$$

$$\ddot{\beta} + p^2 \left(\beta + \frac{k}{E} \beta - \frac{k}{E} \omega \alpha \right) = 0,$$

где $p^2 = 48EJ/l^2$ есть квадрат собственной частоты колебаний невращающейся системы. Для решения однородной системы дифференциальных уравнений (31.11) положим, как обычно,

$$\alpha = A e^{i\lambda t}, \quad \beta = B e^{i\lambda t}, \quad (31.12)$$

где A, B, λ — постоянные.

Подставляя (31.12) в (31.11), получим систему алгебраических уравнений, однородную относительно A и B :

$$\left(\lambda^2 + p^2 + p^2 \frac{k}{E} \lambda \right) A + p^2 \frac{k}{E} \omega B = 0, \quad (31.13)$$

$$-p^2 \frac{k}{E} \omega A + \left(\lambda^2 + p^2 + p^2 \frac{k}{E} \lambda \right) B = 0.$$

Конечно, система (31.12) удовлетворяется тривиальными решениями $A=0$, $B=0$, но это решение означает возможность существования невозмущенной формы вала при отсутствии возмущений. Для исследования движения, возникающего после некоторого начального возмущения, необходимо рассмотреть условие нулевых решений для A и B , которое имеет вид

$$\begin{vmatrix} k^2 + \rho^2 + \rho^2 \frac{k}{2} \lambda & \rho^2 \frac{k\omega}{2} \\ -\rho^2 \frac{k\omega}{2} & k^2 + \rho^2 + \rho^2 \frac{k}{2} \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (31.14)$$

Из (31.14) следует характеристическое уравнение четвертой степени для k :

$$\left(k^2 + \rho^2 \frac{k}{2} \lambda + \rho^2\right)^2 + \left(\rho^2 \frac{k\omega}{2}\right)^2 = 0. \quad (31.15)$$

Если хотя бы один из корней биквадратного уравнения (31.15) имеет положительную действительную часть, то в выражениях (31.12) появятся члены, неограниченно возрастающие с течением времени. Поэтому, чтобы решения (31.12) представляли затухающий процесс, т. е. для устойчивости системы, необходима отрицательность всех действительных частей корней уравнения (31.15). Несложный анализ может показать, что это условие выполняется при

$$\omega < \rho. \quad (31.16)$$



Рис. 31.3. Силы, действующие на диск

Отсюда следует, что при сколь угодно малом внутреннем трении цилиндрической форма ось вала неустойчива, если угловая скорость вращения больше, чем собственная частота вращающейся системы.

В то же время известно, что при отсутствии трения подобная система устойчива как при $\omega < \rho$, так и при $\omega > \rho$. Следовательно, внутреннее трение оказывается дестабилизирующим фактором, вызывающим неустойчивость системы при $\omega > \rho$.

Нетрудно убедиться в том, что внешнее вязкое трение влияет противоположным образом. Для этого положим, что сила внешнего трения имеет составляющие $-\alpha\dot{x}$ и $-\alpha\dot{y}$ (рис. 31.3); тогда дифференциальные уравнения дви-

жения (31.1) примут вид

$$m\ddot{x} = -P_x - \alpha\dot{x}, \quad m\ddot{y} = -P_y - \alpha\dot{y}. \quad (31.17)$$

Подставив сюда ранее найденные выражения (31.10) для сил P_x и P_y , получим вместо (31.11)

$$\ddot{x} + \rho^2 \left(x + \frac{k}{2} \dot{x} + \frac{k}{2} \omega x\right) + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = 0,$$

$$\ddot{y} + \rho^2 \left(y + \frac{k}{2} \dot{y} - \frac{k}{2} \omega y\right) + \frac{\alpha}{m} \dot{y} = 0.$$

Вновь, представляя решение в виде (31.12), находим

$$\left[k^2 + \lambda \left(\rho^2 \frac{k}{2} + \frac{\alpha}{m}\right) + \rho^2\right] A + \rho^2 \frac{k}{2} \omega B = 0,$$

$$-\rho^2 \frac{k}{2} \omega A + \left[k^2 + \lambda \left(\rho^2 \frac{k}{2} + \frac{\alpha}{m}\right) + \rho^2\right] B = 0.$$

Соответственно характеристическое уравнение вместо (31.15) становится таким:

$$\left[k^2 + \lambda \left(\rho^2 \frac{k}{2} + \frac{\alpha}{m}\right) + \rho^2\right]^2 + \left(\rho^2 \frac{k\omega}{2}\right)^2 = 0$$

и условие устойчивости принимает вид

$$\omega < \rho + \frac{E\alpha}{k\rho m}. \quad (31.18)$$

Из сравнения с (31.16) видно, что наличие трения расширяет область устойчивости вала. Однако по этой причине в окрестности области неустойчивости наблюдается далеко не всегда.

Работа Лиси опубликована в журнале «Риб. Мадж» (1929, т. 45, № 4), Статья Камбозо и Николара см. в журнале «Ест. Еспер.» (1934, т. 27), Статья Е. Л. Николы «К теории скользящего вала» напечатана в «Труды Ленинградского государственного университета» (1937, т. 9), см. также книгу Ф. Р. Давидберг «Общие свойства вращающегося вала» (Изд-во АН СССР, 1939). По поводу теории Вейсбаха см., например, книгу Г. Петера, упомянутую выше на с. 141, а также книгу Д. Р. Перлова «Вращение в теории устойчивости движений» (Изд. Наука, 1958, 156 с.).

§ 32. Линейные случаи реализации кулоновых сил сухого трения

Реальные свойства сил сухого трения наиболее просто описываются при помощи закона Кулона^{*)}

$$T = -J\dot{\alpha}. \quad (32.1)$$

^{*)} Шарль-Огюстен Кулон (1735—1806) — французский физик, с 1782 г. — член Парижской Академии наук. Работы Кулона в области

Здесь T — проекция силы трения на направление скорости, f — коэффициент трения, зависящий только от свойств соприкасающихся поверхностей, N — нормальное давление. При изменении направления движения знак силы трения также меняется, и в целом характеристика трения существенно нелинейна, как это графически представлено на рис. 32.1, а.

Казалось бы, что в настоящей главе, посвященной линейным задачам, вообще не следовало касаться случая действия нелинейных сил. Однако речь пойдет о таких особенных случаях, в которых благодаря свойствам механических систем происходит любопытное преобразование кулонова трения в силу линейного характера — в явном сопротивлении и даже в линейную восстанавливающую силу.



Рис. 32.1 а) Закон Кулона б) силы, действующие на сферике, лежащей на двух шайбах

Кулоново трение как линейная восстанавливающая сила. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 32.1, б. На два вращающихся в противоположные стороны цилиндрических шайбы одинакового радиуса свободно положен однородный стержень; центры шайб находятся на горизонтальной прямой. Силы трения, развивающиеся в точках касания стержня со шайбами, следуют закону Кулона, т. е. пропорциональны соответствующим давлениям. Исследуем движение стержня после того, как он тем или иным образом выведен из положения равновесия.

механике посвящая трение и кручению вкрутки стержней; с помощью дифференциала от крутящих моментов Кулон установил основные законы неэластичности и моменты неэластичности.

Закон Кулон был большой впади в душу у трезвца, но традиционные вычисления кулонова трения, закон Кулона не отличаются в значительности (32.1) шайбы. В действительности этот закон был отнесен к сферическому шару Габриэлем Аполонионом (1633—1704) в честь за смертью за доминирующую. В 1699 г. Аполонионом было высказано предположение, как это должно быть, что трение двух соприкасающихся тел возрастает с увеличением площади касания... На основе трения возрастает только с ростом нагрузки.

Пусть в произвольный момент времени t центр тяжести S стержня смещен на расстояние x от оси симметрии. Тогда результирующий шайбовый составит

$$N_1 = \frac{l-x}{2l} mg, \quad N_2 = \frac{l+x}{2l} mg.$$

Здесь m — масса стержня, $2l$ — расстояние между центрами шайб. Соответственно проекция сил трения будут равны

$$T_1 = \frac{l-x}{2l} fmg, \quad T_2 = -\frac{l+x}{2l} fmg,$$

где f — коэффициент трения. Таким образом, суммарная сила трения имеет вид

$$T = T_1 + T_2 = -\frac{fmg}{l} x, \quad (32.2)$$

т. е. пропорциональна перемещению x и имеет противоположное направление. Уже здесь отчетливо видно, что в этой системе сила трения играет восстановительную роль и удивительным образом преобразуется в восстанавливающую силу.

Продолжим решение задачи и запишем дифференциальное уравнение движения стержня в проекции на горизонтальную ось

$$- \frac{fmg}{l} x = m\ddot{x}.$$

Если обозначить

$$\rho = \sqrt{\frac{gl}{f}}, \quad (32.3)$$

то уравнение приобретает самый обычный вид дифференциального уравнения свободных незатухающих колебаний

$$\ddot{x} + \rho^2 x = 0. \quad (32.4)$$

Таким образом, движение стержня будет представлять собой гармонические колебания с частотой ρ ; это можно было сразу предсказать по виду уравнения (32.2), который усиливается спиральной характер силы трения. Формула (32.3) может быть использована для определения коэффициента трения f по наблюдению в опыте значения угловой частоты ρ . Любопытно, что при изменении направлений движения шайбовых свойства системы резко меняются — положение равновесия (когда точка S располагается на оси симметрии) становится неустойчивым, и после любого сколь угодно малого возмущения система будет постоянно

увести от положения равновесия. Этот случай приводит к уравнению (32.4), но со знаком минус перед вторым слагаемым.

Кинетика трения как вязкая сила. Рассмотрим движение материальной точки M по шероховатой плоскости xOy , когда кроме постоянной составляющей скорости v_x имеется значительная переменная составляющая v_y (рис. 32.2). Заметим, что вектор полной скорости составляет малый угол α с осью y :

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_x}{v_y}.$$

Этим же углом определяется направление полной силы трения T . Следовательно, проекция силы трения на координатные оси равны (с точностью до знака второго порядка)

$$T_x = -T\alpha = -T \frac{v_x}{v_y}, \quad T_y = -T.$$

Если ввести обозначение

$$T_0 v_y = k,$$

то проекция T_x принимает вид

$$T_x = -k v_x,$$

т. е. оказывается пропорциональной скорости v_x . Поэтому не будет ошибкой сказать, что T_x проявляется в виде силы линейного вязкого трения; соответственно при составлении дифференциального уравнения движения в проекции на ось x эта сила должна быть включена в виде $-k\dot{x}$, типичное для сил вязкого трения. Конечно, это свойство имеет место лишь при условии, что $|v_x| \ll |v_y|$, т. е. при весьма быстром движении в направлении оси y .

Пусть, например, валфа быстро вращается вала находится в подшипнике скольжения, причем фрикционные свойства этой нипетической пары описываются законом Кулона; при относительно медленных движениях валфа вдоль оси вала соответствующую составляющую силы трения следует считать вязкой. Это свойство находит практическое применение в машиностроении. Извест-

но, что обычные демпферы сухого трения страдают одним недостатком: в некоторой зоне частот их работа неустойчива. Поэтому представляется интересным описанное выше преобразование сухого трения в вязкое трение.

На этой базе основан демпфер В. А. Кудрякова (рис. 32.3, а). Демпфер состоит из двух частей, которые порознь

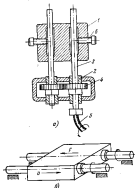


Рис. 32.3. а) Схема демпфера; б) схема увеличенной сухой трения и медленного валаца валаца

соединяются с теми деталями, относительно колебания которых необходимо демпфировать. Одна часть представляет собой корпус 1 произвольной конфигурации, в котором расточены два параллельных отверстия. Вторая часть состоит из картера 2, в котором на подшипниках смонтированы два валика 3, взаимно параллельные оси и соединенные между собой передаточной 4; один из валиков получает вращение, например, при повороте гибкого вала 5. Валики входят в отверстия корпуса 1 с трением, значение которого

регулируется винтами 6. При колебаниях демпфируемого объекта в демпфере развивается сила сопротивления, практически пропорциональная скорости относительного движения.

Та же идея используется в системах подачи станин, схематически изображенной на рис. 32.3, б. Направляющие выполняются в виде двух противоположно стержней, вдоль которых на втулках перемещается узел; при относительно медленных продольных движениях узла возникает продольная сила, линейно зависящая от скорости продольного перемещения (вращение может быть проделано на стержнях, а втулка; понятно, что это не является делом). Описание конструкции также обеспечивает устойчивое демпфирование продольных колебаний, если они по какой-либо причине возникают. Кроме того, такая конструкция хороша тем, что в ней отсутствует «зона застоя» при изменении направления движения; такая зона всегда возникает в системах с сухим трением.

Во всех системах подобного типа быстрое движение в одном направлении облегает противоположное трение в перпендикулярном направлении. Этим свойством, в частности, объясняется использование в технике явления габриферозации. Прежде чем перейти к анализу этого явления, необходимо остановиться на следующей задаче Н. Е. Жуковского^{*)} (задача о плоском раскате).

Пусть $\xi O\eta$ — неподвижная система осей, лежащая в горизонтальной плоскости, и xOy — система осей, лежащая в той же плоскости и жестко связанная с горизонтальной площадкой A , имеющей широкуюную поверхность; оси x, y соответственно параллельны осям ξ, η (рис. 32.4, а). Полагая, что площадка A поступательно движется, оставаясь в той же плоскости $\xi O\eta$, причем каждая точка поверхности движется по окружности радиуса R . Таким образом, абсолютное движение какой-либо точки площадки описывается уравнениями

$$\xi = \xi_0 + R \cos \omega t, \quad \eta = \eta_0 + R \sin \omega t,$$

так что проекция ускорения точки на неподвижные оси ξ, η имеют вид

$$\ddot{\xi} = -R\omega^2 \cos \omega t, \quad \ddot{\eta} = -R\omega^2 \sin \omega t.$$

^{*)} Николай Егорович Жуковский (1875—1921) — профессор механики Московского высшего технического училища (с 1879 г.) и Московского университета (с 1893 г.), вице-президент Петербургской Академии наук (с 1904 г.). Автор ряда основополагающих работ в области гидро- и аэродинамики, основателя ЦАГИ.

Конечно, они одинаковы для всех точек, т. е. не связаны с координатами ξ_0, η_0 . Далее полагаем, что на площадке находится плоская частица массой m ; координаты частицы в подвижной системе осей обозначим через x и y . Если частица движется относительно площадки A (скользит по ней), то $x = x(t), y = y(t)$, и проекции ускорения частицы будут состоять из двух слагаемых, определяющих относительное и переносное ускорение частицы:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \ddot{x} + \ddot{\xi} = \ddot{x} - R\omega^2 \cos \omega t, \\ m\ddot{y} &= \ddot{y} + \ddot{\eta} = \ddot{y} - R\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (32.5)$$

На частицу действует сила трения постоянной модуля $F = \mu mg$, направленная против относительной скорости,

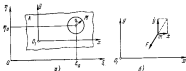


Рис. 32.4. Система координат ξ, η неподвижна, система координат x, y движется поступательно

имеющей проекции \dot{x} и \dot{y} . Следовательно, проекция силы трения на оси ξ, η (или на оси x, y) имеют вид (рис. 32.4, б)

$$F_{\xi} = -f mg \frac{\dot{x}}{V \dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad F_{\eta} = -f mg \frac{\dot{y}}{V \dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (32.6)$$

Теперь запишем дифференциальные уравнения движения

$$m\ddot{x} = F_{\xi}, \quad m\ddot{y} = F_{\eta}. \quad (32.7)$$

Подставив сюда выражения (32.5) и (32.6), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} + f g \frac{\dot{x}}{V \dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= R\omega^2 \cos \omega t, \\ \ddot{y} + f g \frac{\dot{y}}{V \dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= R\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (32.8)$$

Разумеется, эти уравнения имеют место при условии, что частица в самом деле скользит по площадке, т. е. если $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$.

В случае относительного покоя $\dot{x} = \dot{y} = 0$ и уравнения (32.7) принимают вид

$$-mR\omega^2 \cos \alpha t = F_x, \quad -mR\omega^2 \sin \alpha t = F_y \quad (32.9)$$

и определяют силу трения покоя (силу сцепления). Модуль этой силы

$$F^0 = mR\omega^2 \quad (32.10)$$

должен быть меньше предельного значения силы трения

$$F_{\max}^0 = fmg. \quad (32.11)$$

Таким образом, условие относительного покоя частицы определяется неравенством $F^0 < F_{\max}^0$, т. е. $\frac{f_0}{R\omega^2} \geq 1$. Соответственно условие относительного движения имеет вид

$$\frac{f_0}{R\omega^2} < 1. \quad (32.12)$$

Предположим, что последнее условие выполнено; можно убедиться, что дифференциальные уравнения (32.8) имеют частное периодическое решение

$$x = R \sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{R\omega^2}\right)^2} \sin(\omega t - \alpha) + x_0, \quad (32.13)$$

$$y = -R \sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{R\omega^2}\right)^2} \cos(\omega t - \alpha) + y_0,$$

где

$$\alpha = \arccos \frac{f_0}{R\omega^2}. \quad (32.14)$$

Постоянные x_0 и y_0 , входящие в решение (32.13), являются координатами центра круговой траектории частицы в подвижных осях x_0y_0 . При этом модуль скорости скольжения остается неизменным во времени:

$$v_r = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\omega \sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{R\omega^2}\right)^2} = \text{const}. \quad (32.15)$$

Для определения траектории относительного движения исключим время t из уравнений движения (32.13). Таким образом мы найдем, что рассматриваемое решение описы-

вает относительное движение частицы по круговой траектории с радиусом

$$r = R \sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{R\omega^2}\right)^2}. \quad (32.16)$$

несколько меньше, чем радиус R абсолютных траекторий точек площадки A .

С увеличением коэффициента трения радиус траектории уменьшается и при $f_0 = R\omega^2 g$ обращается в нуль; этому соответствует приращивание частицы в площадке. Наоборот, с уменьшением коэффициента трения радиус траектории частицы увеличивается и в предельном случае, когда $f_0 = 0$, становится равным радиусу R . При этом частица свободно скользит по площадке, а ее относительное движение точно воспроизводит переносное движение площадки, то совершается в противоположном направлении; в системе координат xy частица неподвижна.

Для проверки физической реализуемости найденного движения необходимо убедиться в устойчивости периодического решения (32.13). Это дополнение к решению Н. Е. Жуковского сделал Цзя Шу-хуай; как оказалось, решение (32.13) устойчиво.

На основе найденного решения задачи Н. Е. Жуковского можно перейти к описанию процесса дифференциала.

Представим себе, что на горизонтальной площадке A располагается сосуд, амальгамный некоторой выпуклой средине, а частица m находится внутри средине, выше уровня амальгамы; причем что объемный вес частицы больше объемного веса средине. Если амальгму вместе с выпуклым телом покатить, то частица может падать («выскочить») в выпуклом теле под действием своего веса; однако это будет лишь при условии, что предельное значение вертикальной силы трения частицы о выпуклую средину достигнуто («за»). Практический интерес представляет противоположный случай, а именно, когда это предельное значение велико; тогда частица будет покатиться в выпуклом теле.

Теперь предположим, что горизонтальной площадке задано такое же движение, как и в задаче Н. Е. Жуковского, причем вместе с площадкой совершает плоскопараллельное движение связанное с ней выпуклое тело. Как мы теперь знаем, при выполнении условия (32.12) частица ста-

* Под осью трения здесь условно понимается разрывистая линия сил сцепления средине движения рассматриваемой системы.

нет проникать сквозь среду, стремясь двигаться в горизонтальной плоскости по круговой траектории.

Но благодаря круговому движению в горизонтальной плоскости частица не уже не встретит такого же сопротивления по вертикали, как в случае покоя сыпучего тела. Иными словами, упомянутое круговое движение создает условия для падения частицы в сыпучем теле, подобно тому как вращение цапфы облегчает ее движение вдоль подшипника.

Таким образом, по круговое движение частицы в горизонтальной плоскости вынуждается движение по вертикали; соответственно траекторией частицы служит винтовая линия. Описание явления служит приближенной основой процесса выработки сыпучих смесей: более тяжелые частицы приобретают возможность постепенно опускаться вниз, причем движение по вертикали весьма сходно с падением тела в вязкой среде.

Эта схема рассуждений делает попытку объяснить иногда встречающиеся малопримечательные соотношения о взаимодействии сыпучего тела при его вибрации.

Движение системы, в которой сила тяжести пренебрежимо мала по сравнению с силой, служит темой статьи Э. Ю. Задвижника Н. В. Мещерякова (20-е изд., — М.: ИИТ).

Денфер В. А. Краткое введение в «Бюллетень изобретений» Комитета по делам изобретений и открытий при Совете Министров СССР (1953, № 6). Схема, приведенная на рис. 33.А, заимствована из статьи В. Л. Куликова в журнале «Вспомогательные инструменты» (1961, № 1); см. также книгу С. П. Ткаченко «Колеманы в машиностроении» (М.: Физматлит, 1960, с. 70).

О статье Н. В. Жукоского см. эту статью «Заметки о вихором движении» Коэф. Физ. т. 3, — М.: Гостехиздат, 1949) и также книгу Н. Н. Белозвона и Г. Ю. Давиденко «Вибрационные процессы» (М.: Физматлит, 1964, с. 235—236). Неполное имя abbrevирует процесс виброобразования было дано Н. Н. Белозвоню, В. П. Горюхиным и Г. В. Пузыковой в статье «Вихором частицы в колеблющейся среде при малом сопротивлении тела среды» (Изв. АН СССР, ОТН, Москва, в машиностроении, 1963, № 6); см. также авторефератную книгу Н. Н. Белозвона и Г. Ю. Давиденко (гл. XII).

§ 33. Демпфирование колебаний трубопровода коррозийными силами

Известно, что на колебательные свойства трубопроводов существенно влияет скорость течения жидкости. Для трубопроводов с закрепленными концами установлено, что с увеличением скорости течения частота свободных колебаний увеличивается и может наступить критическое состояние, характеризующееся нулевой частотой; в этом случае

дугает иметь одну из применений дестабилизировать действие потока постоянной скорости. Пульсация движения в скорости также может послужить причиной возникновения предела колебаний, угрожающих прочностим трубопровода и плотности соединений.

Тем не менее могут существовать такие устройства, в которых течение жидкости возмущениям оказывает дестабилизирующее действие. Нужно обозначиться, что подобные случаи исключительны; однако анализ этих особенностей систем может помочь лучшему усвоению явления взаимодействия потока и трубопровода.

Обратимся к следующей задаче этого типа и сначала рассмотрим совершенно жесткую консоль, левый конец которой упруго заделан (рис. 33.1, а), причем c — коэффициент жесткости заделки (момент, развивающийся при повороте консоли на угол, равный единице). Пусть m — масса единицы длины консоли, l — ее общая длина, I — момент инерции консоли относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа. Тогда собственная частота колебаний консоли около поперечных равновесий определяется формулой

$$\rho = \sqrt{\frac{c}{\gamma}} = \sqrt{\frac{EI}{mg}}. \quad (33.1)$$

Теперь усложним задачу и представим себе, что консоль представляет собой трубу, т. е. обладает продольным изгибом, вдоль которого слева направо непрерывным потоком течет жидкость; на правом конце происходит свободное истечение жидкости (рис. 33.1, б). Массу единицы длины струи обозначим через m_0 , скорость течения — через v .

В чем выражается влияние потока на колебательные свойства системы? Сразу подчеркнем: было бы ошибкой считать, что система сохраняет свои консервативные свойства

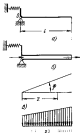


Рис. 33.1. а) Упруго заделанная жесткая консоль; б) консоль упруго заделанная жесткая труба; в) струя истекает из трубы; д) вихором течения на трубу

будет двигаться вдоль оси y , а сторона — колебаться по схеме двумерной балки с консолью. Рассмотрим свободные колебания, которые вызваны некоторым начальным возмущением изображенного на рисунке равновесного состояния. Пренебрегая восстанавливающим действием силы тяжести, т. е. считая, что восстанавливающей силой является только сила упругости стержня, можно записать дифференциальное уравнение

$$m\ddot{y} + cy = 0, \quad (34.1)$$

где m — масса груза, c — коэффициент жесткости стержня. Втулка B , если она достаточно короткая, создает условие, близкое к условиям шарнирного опирания стержня; соответственно коэффициент жесткости c можно определить по известной формуле сопротивления материала

$$c = \frac{3EI}{l^3 - a^3} \quad (34.2)$$

Здесь предполагается, что стержень имеет постоянное поперечное сечение с моментом инерции I ; черта E обозначает модуль упругости материала стержня.

Таким образом, дифференциальное уравнение (34.1) принимает вид

$$\ddot{y} + \frac{3EI}{m(l^3 - a^3)} y = 0, \quad (34.3)$$

Если расстояние a постоянно, то дифференциальное уравнение (34.3) описывает свободные колебания массы около ее среднего положения, причем дробь $3EI/[m(l^3 - a^3)]$ представляет собой квадрат частоты свободных колебаний.

Допустим теперь, что втулка B скользит вдоль стержня 2 , следуя заданному закону

$$s = s_0 + A \cos \omega t, \quad (34.4)$$

т. е. совершает гармонические колебания с амплитудой A и круговой частотой ω ; здесь s_0 — среднее расстояние от втулки до верхнего шарнира. В этом случае коэффициент жесткости называется функцией времени

$$c = \frac{3EI}{(l^3 - s_0^3 - 3A \cos \omega t)^2} \quad (34.5)$$

и дифференциальное уравнение (34.3) становится уравнением с переменными коэффициентами

$$\ddot{y} + \frac{3EI}{m(l^3 - s_0^3 - 3A \cos \omega t)^2} y = 0. \quad (34.6)$$

Колебания массы m теперь уже нельзя назвать свободными, так как они происходят при заданном во времени внешнем воздействии в виде периодического изменения жесткости системы. С другой стороны, их нельзя назвать и вынужденными, так как внешнее воздействие не представляет собой вынуждающую силу, а входит в левую часть уравнения движения. Колебания подобных систем, происходящие при заданном изменении параметров системы (в данном случае жесткости), называются параметрическими возбуждениями, или, проще, — параметрическими.

Как мы увидим ниже, в некоторых областях частот возбуждения амплитуда параметрических колебаний возрастает и наступает параметрический резонанс. В некотором смысле он похож на обычный резонанс, который наступает лишь при точно определенных значениях частоты внешнего воздействия.

Существует много механических систем, подверженных параметрическому возбуждению. В ряде случаев дифференциальное уравнение параметрических колебаний можно привести к форме

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a - 2q \cos 2t) y = 0, \quad (34.7)$$

где a и q — постоянные.

Так, например, если в рассмотренной выше механической системе (рис. 34.1), амплитуда колебаний втулки весьма мала по сравнению со средним размером $l - a$, то вместо (34.5) приближенно получится

$$c \approx \frac{3EI}{(l^3 - s_0^3)^2} \left(1 - \frac{3A}{l - s_0} \cos \omega t \right) \quad (34.8)$$

и дифференциальное уравнение (34.6) принимает вид

$$\ddot{y} + \frac{3EI}{m(l^3 - s_0^3)^2} \left(1 - \frac{3A}{l - s_0} \cos \omega t \right) y = 0. \quad (34.9)$$

Переходим теперь к безразмерному времени τ

$$2\tau = \omega t, \quad (34.10)$$



Рис. 34.1. Упругий стержень с консольной опорой в виде втулки

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a^2}{l} \frac{dy}{dt}, \quad (34.11)$$

и дифференциальное уравнение (34.5) приобретает форму (34.7), причем

$$a = \frac{11EI}{\cos^2 \theta - a_0^2}, \quad q = \frac{2AEI}{\cos^2 \theta - a_0^2}. \quad (34.12)$$

Преобразование этого рода типично для случаев малой глубины пульсации переменного параметра системы.

Обратимся теперь к основному уравнению рассматриваемых здесь матах (34.7), которое называется *уравнением*

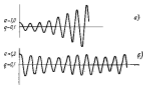


Рис. 34.1. Два типа решения уравнения Маттье: а) устойчивое; б) неустойчивое.

Маттье. Решения уравнения Маттье носят колебательный характер, их свойства зависят от конкретных значений параметров a и q . В одном случае комбинация a и q соответствует колебанию, ограниченному по амплитуде, а в других случаях — колебанию с возрастающими амплитудами. Дальнейшие подробности колебаний практически малоинтересны, так как основную важность представляет только тенденция колебательного процесса — если амплитуды остаются ограниченными, то система устойчива; в противном случае система неустойчива, и после любого начального возмущения состояние равновесия возникает параметрический резонанс.

Результаты решения уравнения Маттье для двух различных комбинаций a и q изображены на рис. 34.2 (эти решения получены с помощью АБМ). Хотя в обоих случаях параметр q системы одинаков ($q=0,1$), но колебания имеют

резко различный характер из-за различия между значениями параметра a ($a=1$; $a=1,2$): в первом случае колебания возрастают, система неустойчива, а во втором случае они остаются ограниченными, т. е. система устойчива.

Для практических целей наиболее важным значение имеет граница между областями устойчивых и неустойчивых решений. Этот вопрос хорошо изучен, причем окончательные результаты представлены в виде диаграммы, построенной в плоскости параметров a и q . Она называется *диаграммой Айбиса — Стрета*; на рис. 34.3 изображена

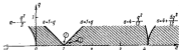


Рис. 34.3. Часть диаграммы Айбиса — Стрета для малых значений параметра q . Точки 1 и 2 соответствуют решениям а) и б) на рис. 34.2

часть диаграммы, относящаяся к малым значениям параметра q . Каждой данной системе, характеризуемой параметрами a и q , соответствует точка с координатами a , q на диаграмме Айбиса — Стрета (изображающая точка). По положению последней сразу можно сделать заключение об устойчивости / неустойчивости системы: если изображающая точка находится в пределах заштрихованных полей диаграммы, то система неустойчива; изображающие точки, расположенные на белых полях, соответствуют неустойчивым системам.

В качестве примеров на диаграмме показаны точки 1 и 2, соответствующие параметрам $a_0=1$, $q_0=0,1$; $a_0=1,2$, $q_0=0,1$ (решения уравнения Маттье для этих случаев даны на рис. 34.2). Точка 1 находится в белой зоне (неустойчивости), а колебания приращают с возрастающими амплитудами (рис. 34.2, а). Точка 2 находится в пределах заштрихованной зоны; ей отвечает движение с ограниченной амплитудой (рис. 34.2, б).

Полная диаграмма Айбиса — Стрета представлена на рис. 34.4. Как видно, в плоскости параметров a , q области устойчивости чередуются с областями неустойчивости, причем наиболее широкая и, можно сказать, наиболее важная область неустойчивости содержит точку $a=1$, $q=0$.

Диаграмма Айаса — Стрета полностью освобождает от выполнения каких-либо операций по решению уравнения Матве. Достаточно составить это уравнение, т. е. найти значения параметров системы α и σ ; после этого диаграмма сразу даст ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости системы.

Проследим за изменением свойств параметрических колебаний при постоянном изменении частоты возбуждения. Возвращаясь для примера к выражениям (34.12), мы видим,

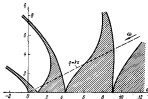


Рис. 34.4. Диаграмма Айаса — Стрета

что с возрастанием частоты оба параметра α и σ пропорционально уменьшаются. Так как отношение обоих параметров остается постоянным, то последовательные состояния системы определяются изображающими точками на отрицательном луче $\alpha = 2\sigma$, проходящем через начало координат. На рис. 34.4 отдельно выделено чередование устойчивых и неустойчивых состояний при возрастающих значениях частоты возбуждения. При весьма больших значениях α система устойчива.

Параметрические колебания вовсе не редкость. Можно указать несколько причин параметрического возбуждения механически систем: а) периодическое изменение жесткости J (как в рассмотренной выше системе); б) периодическое изменение так называемых параметрических n и σ узлов; в) периодическое изменение α и σ в ряде систем.

*) Параметрические колебания также встречаются при статическом воздействии которых возможна потеря устойчивости в определенном смысле.

Приведем примеры всех трех видов параметрического возбуждения, а затем рассмотрим случаи смешанного характера, когда причиной параметрического возбуждения одновременно являются периодическое изменение жесткости и нагрузки.

а. *Периодические изменения жесткости.* Упругой частью изображенной на рис. 34.5 системы является шлицевый вал J ; на левом конце вала находится диск 2 . С валом соединен шлицевый массивный ступица 3 , которая может скользить вдоль оси вала и совершать гармонические колебания в вертикальном направлении. В этой системе возможно параметрическое возбуждение не только изгибных, но и крутильных колебаний.

Пусть свободная длина вала в момент времени t составляет

$$l = l_0 + A \cos \omega t; \quad (34.13)$$

при этом коэффициент жесткости кручения вала равен

$$c = \frac{6J_p}{l} = \frac{6J_p}{l_0 + A \cos \omega t} \quad (34.14)$$

Если амплитуда колебаний A значительно меньше среднего значения длины l_0 , то выражение (34.14) можно представить в форме

$$c = \frac{6J_p}{l_0} \left(1 - \frac{A}{l_0} \cos \omega t \right), \quad (34.15)$$

что по структуре полностью совпадает с выражением (34.8). Поэтому крутильные колебания рассматриваемой системы также описываются уравнением Матве (34.7), причём

$$\alpha = \frac{6J_p}{l_0^2}, \quad \sigma = \frac{35J_p A}{2l_0^3}. \quad (34.16)$$

Другой пример системы с периодическим изменением жесткости представлен на рис. 34.6. Система содержит диск 1 , укрепленный поперек в вертикальном вале 2 . На части вала над полем поперечного сечения с различными главными моментами инерции (например, прямоугольное сечение, по этой причине жесткость вала неодинакова в двух главных направлениях x и y). Направление z фиксирует шлицевость, а второй может происходить изгиб вала. Поэтому при изгибе вала жесткость изгиба в уни-

зависит плоскости периодически меняется и возможно параметрическое возбуждение колебаний^{*)}.

С периодическим случаем параметрического возбуждения колебаний пришлось столкнуться при работе одного платного подрывника (рис. 34.7). Направляющие 1, вдоль которых перемещается клет 2, представляют собой многогорные неразрезные балки; их боковая жесткость зависит от уровня, на котором находится клет; при расположении клетки против опор 3 жесткость наибольшая, а при расположении клетки посередине пролета жесткость принимает наименьшее значение. В процессе движения клетки по вертикали боковая жесткость периодически меняется, что и создает опасность возникновения параметрического резонанса. В случае, о котором идет речь, действительно рас-



Рис. 34.5. Угнутая система со вертикальной направляющей

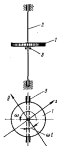


Рис. 34.6. Угнутая система с горизонтальной направляющей, фиксирующей плоскость клетки относительно

звенались значительные колебания в некотором диапазоне скоростей движения клетки; для устранения колебаний пришлось существенно изменить конструкцию подрывника; лишь после этого система была выведена из зоны параметрического резонанса.

^{*)} Заметим, что если направляющие отсутствуют, то вал получает возможность колебаться в двух плоскостях; если материал пучка можно считать, что вал устойчив по этой области значений скоростей $|\omega_1, \omega_2|$ (здесь $\omega_1 = \sqrt{C_1/I_1}$, $\omega_2 = \sqrt{C_2/I_2}$; C_1, C_2 — коэффициенты упругости жесткой вала).

Как и в других областях теории колебаний, стандартным примером может служить маятник (рис. 34.8).

Если точка подвеса неподвижна, то единственным моментом относительно этой точки является момент силы веса — mg/l (m — масса маятника, l — его длина, φ —

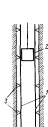


Рис. 34.7. Система с вертикальной направляющей

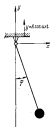


Рис. 34.8. Маятник с колеблющейся по вертикали точкой подвеса

угол отклонения), и дифференциальное уравнение малых колебаний маятника имеет вид

$$-mg \delta \varphi = m l \ddot{\varphi}, \quad (34.17)$$

При заданных горизонтальных колебаниях точки подвеса возникают вынужденные колебания маятника, не представляющие здесь для нас интереса.

Рассмотрим теперь случай, когда точка подвеса колеблется вдоль оси y по закону

$$y = A \cos \omega t \quad (34.18)$$

и при составлении уравнения моментов нужно учесть переносную силу инерции — $m\ddot{y} = -m A \omega^2 \cos \omega t$; ее момент составляет $m A \omega^2 l \varphi \cos \omega t$, и дифференциальное уравнение колебаний маятника запишется в виде

$$-mg \delta \varphi + m A \omega^2 l \varphi \cos \omega t = m l \ddot{\varphi}, \quad (34.19)$$

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{A\omega^2}{l} \cos \omega t \right) \varphi = 0. \quad (34.20)$$

Это уравнение можно привести к виду (34.7), если положить

$$2t = \omega t, \quad \alpha = \frac{4g}{\omega^2 l}, \quad \varphi = \frac{2A}{l}. \quad (34.21)$$

Теперь на диаграммы Айвса — Стрета непосредственно видно, что если бы малой или большой амплитуды A , неустойчивость нижнего положения маятника наступает always значеиый $\alpha = 1, 4, 8, \dots$, т. е. при

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{l}}, \sqrt{\frac{g}{l}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{l}}, \dots \quad (34.22)$$

Сметим теперь возможность устойчивости в е р з и е о положении маятника (рис. 34.9, а). При неподвижной

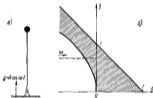


Рис. 34.9. а) Оправленный маятник с колеблющейся по вертикали точкой подвеса; б) фрагмент диаграммы Айвса — Стрета

опоре это положение, конечно, неустойчиво; однако вибрация основания может придать этому положению устойчивость. Чтобы получить уравнение движения для данного случая, достаточно изменить знак перед членом, содержащим ускорение g в уравнении (34.20); соответственно мы получим в (34.21)

$$\alpha = -\frac{4g}{\omega^2 l} \quad (34.23)$$

(остальные величины останутся прежними).

На данного на рис. 34.9 фрагмента диаграммы Айвса — Стрета видно, что первое положение маятника (когда $\alpha < 0$) может быть устойчивым. При небольших амплитудах A колебаний точки подвеса (когда $0 < |\varphi| < 1$) устойчивость верхнего положения достигается, если удовлетворено неравенство $|\alpha| < 4^2/9$. Согласно выражению (34.23) это условие устойчивости принимает вид

$$\omega > \frac{V \frac{3g}{l}}{3}. \quad (34.24)$$

Следовательно, верхнему положению маятника может быть придана устойчивость, путем подвешивания разорванной высокоэластичной вертикальной нити к основанию. Кстати заметим, что неравенство (34.24), в сущности, определяет нижний уровень максимальной скорости колебаний ωl , при которой достигается описываемый эффект; максимальная скорость колебаний должна превышать скорость свободного падения тела с высоты, равной длине маятника (т. е. значение $V \frac{2gl}{g}$).

Все что вышло об этом любопытном явлении П. Л. Капца:

«Демонстрация... устойчивости маятника с колеблющимся подвесом по моему эффекту, как явление гироконической устойчивости колеса. С опытом маятником с колеблющимся подвесом хотя и просто, но все же сопряжены с большими трудностями, чем опытом с колесом, так как требуется специальный механизм для сообщения быстрого колебаний подвесу маятника.

Мы осуществляли это при помощи простого прибора, схематически изображенного на рис. 34.10. На оси небольшого электродвигателя 1 с большим числом оборотов (мы использовали электродвигатель от швейной машинки) эксцентрично насажен шариковый подшипник 2, к обоим подшипникам прикреплена тяга 3, которая приводит в колебание рычаг 4. Один конец рычага 4 прикреплен к неподвижной опоре, а на другой подвешивается стержень маятника 5 так, чтобы он мог свободно вращаться...

Когда прибор приводится в действие, то стержень маятника ведет себя так, как будто бы для него существует свободная нить, натянутая по оси колеблющейся подвески. Поскольку частота колебаний подвески велика, то изображение стержня маятника воспринимается глазом несколько размытым, и колеблющееся движение маятника. Поэтому явление устойчивости производит впечатление статического. Если маятнику сообщить толчок в сторону, то он

начинает качаться как обычный маятник... Эта колебания затухают, и маятник приходит в вертикальное положение.

б. *Периодическое изменение параметра силы излучения.* Рассмотрим систему, изображенную на рис. 34.11. Груз J закреплен на верхнем конце вертикального стержня жесткого стержня 2, внизу стержень имеет опору 3, упруго сопротивляющуюся повороту (упругий шарнир). На верхний конец стержня действует вертикальная сила P , например, вес груза G .

Эта сила является параметрической нагрузкой; если она постоянна во времени, то существует ее критическое значение $P_{кр}$, которое можно найти при помощи способа Эйлера.



Рис. 34.10. Схема установки В. В. Клепача

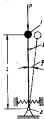


Рис. 34.11. Стержень нагруженный вертикальной силой P

Пусть φ — угол отклонения стержня от вертикали и c — коэффициент жесткости шарнира. Тогда восстанавливающий момент (момент упругого шарнира) составляет $-c\varphi$, и уравнение равновесия стержня в отклоненном состоянии получает вид

$$P(l\varphi - c\varphi) = 0. \quad (34.28)$$

На условия $\varphi \neq 0$ находим, что отклоненное состояние равновесия возможно, если

$$P = \frac{c}{l}. \quad (34.29)$$

Этой формулой определяется критическое значение статической силы P .

То же значение можно найти, рассматривая свободные колебания груза J . В отличие от уравнения статика (34.25),

уравнение моментов относительно шарнира 3 содержит инерционный член и имеет вид

$$P(l\ddot{\varphi} - c\dot{\varphi}) = m l^2 \ddot{\varphi}, \quad (34.27)$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + \frac{c - P l}{m l^2} \dot{\varphi} = 0. \quad (34.28)$$

При

$$c = P l \quad (34.29)$$

частота свободных колебаний системы обращается в нуль, т. е. система становится апериодичной. Для критической силы из (34.29) следует следующий результат (34.26).

Теперь вернемся к нашей теме и рассмотрим случай, когда сила P меняется по гармоническому закону

$$P = P_0 + P_1 \cos \omega t. \quad (34.30)$$

Тогда уравнение колебаний стержня (25.13) запишется в виде

$$(P_0 + P_1 \cos \omega t) l \varphi - c \varphi = m l^2 \ddot{\varphi}, \quad (34.31)$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{m l^2} (c - P_0 l - P_1 l \cos \omega t) \varphi = 0. \quad (34.32)$$

Это уравнение приводится к уравнению Матвея (34.7), если положить

$$2t = \omega t, \quad c = \frac{1}{m l^2} (P_{кр} l - P_0 l), \quad q = \frac{2 P_1 l}{m l^2}. \quad (34.33)$$

где $P_{кр}$ — эйлера критическая сила, данная выражением (34.26).

При возрастании частоты ω параметры a и q пропорционально увеличиваются. Штриховой луч на рис. 34.4 указывает, что система переходит из области устойчивых и неустойчивых состояний. Наклон этого луча определяется отношением

$$k = \frac{1}{2} = \frac{P_1}{2(P_{кр} l - P_0 l)}. \quad (34.34)$$

При данных значениях P_1 величина k зависит от разности $P_{кр} - P_0$. Чем ближе значение статической составляющей P_0 к критическому значению $P_{кр}$, тем круче проходит луч в том направлении участка области неустойчивости. Конечно, это естественно, так как приближение силы P_0 к эйлеровой силе должно означать возможность неустой-

жесткости. Впрочем, потеря устойчивости возможна при сколь угодно малых сжимающих силах P_0 и даже при растягивающих силах. Хотя при $P_0 < 0$ луч $q = k$ проходит весьма полого, но также пересекает ряд областей неустойчивости.

Устойчивость упругих систем при действии периодических параметрических нагрузок впервые была изучена в 1924 г. Н. М. Белозелом^{*)}, который рассмотрел гибкую двухпортовую ступку с шарнирами по концам и равномерно распределенной массой m (рис. 34.12). Это решение можно получить, если за дифференциальное уравнение статического продольно-поперечного изгиба

$$EJv'''' + Pv'' = q,$$

в котором $v = v(\xi)$ — отклонения произвольной точки оси ступки при изгибе, P — продольная сжимающая сила, EJ — жесткость при изгибе, $q = q(\xi)$ — интенсивность распределенной поперечной нагрузки. Для того чтобы перейти к задаче о колебаниях, нужно считать отклонения функцией двух переменных $v = v(\xi, t)$ и принять за поперечную нагрузку силу инерции интенсивности $-m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$.

Рис. 34.12. Система в задаче Н. М. Белозела

Считая, что продольная сила определяется параметром (34.30), приходим к дифференциальному уравнению в частных производных

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} + (P_0 + P_1 \cos \omega t) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Граничные условия здесь удовлетворяют решению вида

$$v = T(\xi) \sin \frac{n\pi t}{T}.$$

Даже Н. М. Белозел последовательно изучил случаи $n=1, 2, \dots$. Ограничимся здесь случаем $n=1$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвест-

ной функции времени T :

$$\ddot{T} + \frac{m^2}{2EI} (P_{cp} - P_0 - P_1 \cos \omega t) T = 0,$$

где $P_{cp} = \frac{1}{2} \rho g L^3$ — первая эйлерова критическая сила для рассматриваемого стержня. Если теперь положить

$$\omega t = 2\pi \alpha, \quad \alpha = \frac{\omega t (P_{cp} - P_0)}{2EI}, \quad \varphi = \frac{2\pi P_1}{2EI},$$

то вновь получим уравнение Матвея (34.7). Изложенные выше соображения о возможности неустойчивости показаны на рис. 34.11 упрощенной схемой полностью сжатой стержневой ступы и в задаче Н. М. Белозела.

Легко видеть, что системы, показанные на рис. 34.11 и 34.12, могут оказаться устойчивыми даже и в тех случаях, когда статическая составляющая сжимающей силы больше эйлеровой силы.

В самом деле, при $P_{cp} > P_0$ луч $q = k$ располагается во втором квадранте диаграммы Айкса — Стрета; на рис. 34.13

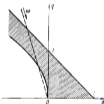


Рис. 34.13. Фрагмент диаграммы Айкса — Стрета



Рис. 34.14. Система с вращающейся диской

видно, что и в этом случае возможна устойчивость системы (в дальнейшем выбранном диапазоне изменения частот ω). Таким образом, статическая составляющая продольной силы при известных условиях может стабилизировать систему, которая неустойчива при действии только статической составляющей. На удивительный эффект комбинационной стабилизации упругих систем обратим

^{*)} Николай Михайлович Белозел (1890—1944) — профессор Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта; в последние годы жизни — завкафедрой динамики Московского института Академии наук СССР, Член-корреспондент АН СССР (в 1937 г.). Автор ряда крупных исследований в области предельной теории упругости, в частности, первого исследования параметрических колебаний стержней.

ые указал В. Н. Челомей в 1956 г. Дальнейшее развитие этой идеи можно найти в работах К. Г. Валеева (1971) и В. В. Болотина (1978).

в. **Плоскостные колебания стержня.** На рис. 34.14 изображен горизонтально расположенный диск I , имеющий форму чаши, закрепленный на упругом вертикальном стержне 2 . С диском связаны концы жесткой спицы 3 , вдоль которой могут скользить два симметрично расположенных груза 4 . Полагая, что стержень задано гармоническое движение, симметричное относительно оси диска, описываемое законом

$$r = r_0 + A \cos \omega t, \quad (34.35)$$

и нужно исследовать крутильные колебания диска вокруг оси стержня. Если I_0 — собственный момент инерции диска относительно этой оси, то полный момент инерции системы диск — грузы составляет

$$I = I_0 + 2mr^2. \quad (34.36)$$

Подставляя сюда выражение (34.35), находим

$$I = I_0 + 2m(r_0 + A \cos \omega t)^2. \quad (34.37)$$

Отсюда видно, что момент инерции рассматриваемой системы является периодической функцией времени.

Не следует думать, что для учета этого обстоятельства достаточно подставить в дифференциальное уравнение

$$I\ddot{\varphi} + c\varphi = 0 \quad (34.38)$$

вместо I функцию времени (34.37). Дело обстоит несколько сложнее. Дифференциальное уравнение (34.38) справедливо только для твердого тела, обладающего постоянным значением момента инерции, и для рассматриваемой системы оно вообще не годится. Правильное дифференциальное уравнение можно получить, например, с помощью теоремы об изменении момента количества движения системы в виде

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\varphi}) + c\varphi = 0, \quad (34.39)$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + \frac{\dot{I}}{I}\dot{\varphi} + \frac{c}{I}\varphi = 0. \quad (34.40)$$

Это уравнение, в отличие от уравнения (34.38), содержит первую производную искомого функции φ , а из него уравнение Матвея в виде (31.7) непосредственно не вытекает.

Тем не менее и в этой системе возможна расстройка колебаний, так как коэффициент при функции φ периодически меняется во времени.

г. **Сложившие случаи.** Возможны случаи, когда в механической системе периодически изменяется как жесткость, так и инерция. Рассмотрим, например, систему, представленную на рис. 34.15, а (длину стержня постоянной длины).

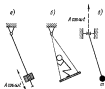


Рис. 34.15. Сложившие случаи колебаний маятника переменной жесткости

В этой системе стержень массы m совершает заданные колебания по закону

$$l = l_0 + A \cos \omega t \quad (34.41)$$

плоть стержня, который будем считать бесмассовым. Момент количества движения системы определяется выражением $ml\dot{\varphi}^2$, в котором φ — угол отклонения стержня от вертикали. Производная этой величины по времени должна быть равна моменту силы тяжести стержня относительно точки подвеса стержня

$$M = -mg\varphi. \quad (34.42)$$

Таким образом, получим дифференциальное уравнение движения системы в виде

$$m(\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{l}) + mg\varphi = 0. \quad (34.43)$$

Здесь видно, что все три коэффициента уравнения — инерция, демпфирование и жесткость — зависят от l , т. е. являются заданными функциями времени. Впрочем, после очевидных упрощений, уравнение (34.43) принимает вид, в принципе тот же, как в уравнении (34.40):

$$\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\frac{\dot{\varphi}}{l} + \frac{g}{l}\varphi = 0, \quad (34.44)$$

К этой же теме приходится, например, задачи о колебаниях катящейся (рис. 34.15, б). Раскатушечные колебания происходят благодаря периодическому протаскиванию человека, скользящего на качельках; при этом центр масс системы перемещается в принципе так же, как на рис. 34.15, а.

Демонстрационную установку маятника переменной длины можно увидеть во всем, изображенном на рис. 34.15, а. Придавая периодическое движение катушке, пропущенной через верхние кольца, можно наблюдать параметрический резонанс системы.

В заключение параграфа сделаем еще несколько замечаний относительно выделенных в настоящем разделе исследований параметрического резонанса.

1. Кроме параметрических колебаний стержней изучены параметрические колебания многих других упругих систем (кольца, пластины и т. п.).

2. Изучался параметрический резонанс, вызванный периодическим, но не гармоническим возмущением (типом прямоугольного сигнала — Е. Моттлером, периодическим излучением — В. А. Гастингом).

3. Исследованы влияния на упругих сопротивлениях (в частности, вязкого трения). При этом установлено, что такие сопротивления, как правило, несколько суживают границы областей неустойчивости; причем, в 1961 г. Ф. Вейденкаммер и Г. Шиндт установили, что в некоторых случаях эти границы расширяются (ими рассмотрен материал, следующий закону деформирования стандартного линейного вязкоупругого тела).

4. Кроме условий возникновения параметрического резонанса, которые можно установить путем анализа линейризованных уравнений, изучены нелинейные задачи о параметрических колебаниях в зонах неустойчивости и определены амплитуды устанавливающихся колебаний типа параметрического резонанса (В. В. Болотин, Ф. Вейденкаммер).

Об этих исследованиях см. книгу В. В. Болотина (1956), обзор Иван-Ивановым (1955) и книгу Г. Шиндта (1974), русское издание 1978 г.).

Статья Н. М. Волкова «Устойчивость графитовых стержней при действии продольных параметрических сил» была опубликована в сборнике «Новейшие сооружения в строительной механике» (Дальгиз, 1954).

О стабилизированном движении параметрически возбужденных систем П. Л. Колман в «Журнале экспериментальной и теоретической физики» (1961, т. 21, вып. 8) и статье П. Н. Чолоева в «Докладах АН СССР» (1968, т. 110, № 3), а также более поздней работе К. Т. Валеева

(Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1971, № 4) и В. П. Болотина (Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1974, № 2), См. также книгу Г. Т. Стрелова «Методы исследования динамических систем типа маятника» (Алма-Ата Наука, 1964).

Параметрический резонанс в плоских системах был рассмотрен Ю. Г. Ислюковым (Труды Ленинградского политеха. инста, 1963, № 202), Рис. 24.2 изображена одна из книг В. Каминского «Введение в теорию нелинейных систем» (М.: Л.: Гостехиздат, 1962). Уравнения граничных слоев во взаимодействии Адамс — Стрелова см. в книге Г. Коудера «Нелинейная механика» (М.: ИЛ, 1963).

Проблема параметрических колебаний рассмотрена также В. В. Колманом «Динамическая устойчивость упругих систем» (М.: Гостехиздат, 1968), Г. Шиндта «Параметрический резонанс» (М.: Мир, 1978) и С. Л. Чехурова «Параметрические колебания и устойчивость периодического движения» (Л.: Наука, 1973, 1983). См. также обзор Иван-Ивановского в «Applied Mechanics Reviews» (1982, т. 18, № 9).

Глава VII

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Настоящая глава посвящена проблеме действия движущихся грузов на упругие конструкции. В § 35 дается краткий исторический очерк возникновения и развития теории. В следующем § 36 описывается символическое решение одной из простых задач; хотя оно было предельно более ста лет назад, разбор двучленной системы остается поучительным и в наше дни. Последние два параграфа (§ 37 и 38) содержат решения двух, в некотором смысле неклассических задач о действии подвижной нагрузки.

§ 35. Краткая историческая справка

Теория динамического действия подвижной нагрузки на упругие конструкции возникла задолго до завершения теории статического расчета сплошных систем и имеет более чем тысячелетнюю историю. Непосредственным поводом для исследования первых творческих вех в экспериментальной исследовании динамического действия подвижных грузов послужило обрушение Чартерского моста (Англия) в 1847 г. Эта катастрофа вызвала острое общественное возмущение и вызвала серьезную тревогу в среде английских инженер-строителей. Перед исследователями стоял вопрос о том, в какой мере эффекты, вызываемые в упругой конструкции подвижной нагрузкой, т. е. прыжки и внутренние усилия, отличаются от статичес-

появления эффектов, которые возникают в условиях статического нагружения.

Одна из первых попыток теоретического решения этого вопроса привела к заключению, что динамические эффекты должны быть в два раза больше статических. Автор этого заключения Х. Коке рассуждал следующим образом. Пусть P — вес груза, катящегося вдоль шарнирно опёртой балки, EJ — её жесткость поперечного сечения балки при изгибе, l — пролет балки, f — прогиб балки в момент прохода груза через её середину (рис. 35.1). Тогда к этому



Рис. 35.1. Изгиб балки под действием движущегося точечного груза

моменту сила P совершает работу Pf ; потенциальная энергия изгиба балки в тот же момент времени составит $\frac{48EJ}{l^3} \cdot \frac{P}{2} \cdot f^2$.

Привравняв оба выражения, Коке нашёл $f = \frac{Pl}{384EJ}$, т. е. динамический прогиб вдвое больше статического прогиба $f_{ст} = \frac{Pl}{192EJ}$. Как видно, в этом рассуждении масса балки не учитывается равной нулю (в противном случае следовало бы учесть кинетическую энергию балки).

Этот результат был получен в 1848 г., но уже в 1849 г. был опровергнут Стоком^{*)}. Стоке обратил внимание на ошибку в балансе энергии: Коке пропустил работу горизонтальной силы, необходимой для поддержания постоянной скорости движения груза по балке. Если не считать, что такая сила отсутствует, то скорость груза, катящегося по аркадной дорожке пути, не может оставаться постоянной и нужно учесть изменение кинетической энергии груза.

С тех пор было опубликовано большое число теоретических и экспериментальных исследований, связанных главным образом с действием подвижной нагрузки на мосты. В последние время появились еще одна важная область приложения теории — действие протекающей жидкости на гибкие трубопроводы.

В зависимости от способа представления шарнирных свойств тел, образующих систему, существуют четыре принципиально различных варианта постановки задачи о действии подвижной нагрузки. Определительные черты этих вариантов можно видеть в следующей таблице, относящейся к двухоперной балке.

Вариант постановки задачи	Этот вариант	
	балка	груз
	жёст	жёст
	жёст	дв
	дв	жёст
	дв	дв

Кратко охарактеризуем каждый из этих вариантов. Вариант 1. Все шарнирные эффекты предполагаются превращаемыми в моменты и давление груза на балку принимается равным весу груза. При такой постановке учитываются только жесткость, не единичность, а «кажущаяся» нагрузка, т. е. переменной расстояние z во времени ($z = bf$ при постоянной скорости движения груза bf).

В 1868 г., независимо друг от друга, Э. Виллер и О. Мор^{*)} предложили при решении таких задач строить специальные графики, называемые ныне линиями влияния (в старой русской технической литературе их называли инфлюентными линиями) — графики изменения внутренних усилий или перемещений в зависимости от координаты груза; графики строятся в предположении, что вес груза равен единице. На рис. 35.2 показаны примеры: линии влияния левой опорной реакции (рис. 35.2, а), линии влияниягибающего момента в середине балки (рис. 35.2, б), линия влияния прогиба середины балки (рис. 35.2, в).

^{*)} Огюст Мор (1833—1912) — профессор Штурмартского, а затем Дрезденского политехникума. Автор ряда работ в области сопротивления материалов и строительной механики.

^{*)} Людвиг Габриэль Сток (1819—1892) — датской физик и математик, член с 1851 г. и президент (1885—1890) Датского королевского общества. Труды Стока посвящены оптике, гидродинамике и математической физике.

При статическом расчете мостов с помощью линий влияния определяют эффекты одностороннего приложения различных систем сил, а также находят самое невыгодное расположение грузов.

Показно, что такая квазистатическая постановка задачи уместна лишь при достаточно малых скоростях движения грузов.

Вариант 2. Предполагается, что масса упругой конструкции незначительна, но давление N груза отличается от статического. Принимая, что положительные прогибы направлены вниз, запишем давление N груза на балку в следующем виде:

$$N = \sigma g - \alpha \frac{d^2 y}{dt^2} = \sigma g - \alpha \frac{d^2 y}{dx^2} v^2. \quad (35.1)$$

В выражении (35.1) под y понимается перемещение груза по вертикали (т. е. прогиб балки под грузом); второй член этого выражения представляет собой вертикальную силу инерции груза.

В таком виде задача была впервые сформулирована в 1849 г. профессором Кембриджского университета Ф. Вилласом. Ученыйна, что балка прогибается под действием

Рис. 35.2. Линии влияния: а) для одной скорости реакции; б) наибольшего момента в середине балки; в) прогиба шарнирной балки

единственной активной силы N . Виллас вывел, что прогиб балки под грузом составляет

$$y = \frac{N l^3 (1 - \nu^2)}{36 E I}. \quad (35.2)$$

Это выражение получается не чисто статическим решением, однако содержащаяся в нем величина N заранее известна и согласно (35.1) сама зависит от прогиба y . Исключив давление N из равенств (35.1) и (35.2), Виллас получил следующее дифференциальное уравнение для основной переменной задачи — прогиба y :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{36 E I}{\alpha v^2 (1 - \nu^2)} y = \frac{g}{v^2}. \quad (35.3)$$

Однако Виллас не смог решить это непростое уравнение с переменными коэффициентами и обратился за помощью к Стоксу, который в том же году дал решение

уравнения (35.3) в виде алгебраического ряда; в первом приближении отношение максимального динамического прогиба к соответствующему статическому прогибу (коэффициент динамичности) оказалось равным

$$\mu = 1 + \frac{\alpha l^3}{36 E I} v^2. \quad (35.4)$$

В этой формуле уже видно влияние нового фактора — скорости движения груза. Стоксу принадлежит также решение уравнения (35.3) в квадратурах.

В 1883 г. Буссенкс^{*)} указал следующие остроконечное преобразование переменных для дифференциального уравнения (35.3):

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{l-x}, \quad \eta = g - \frac{N v^2}{3 E I} \operatorname{ch} \xi, \quad (35.5)$$

после которого получается уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + 4 \eta = \frac{2}{3 E I} g, \quad (35.6)$$

где

$$4 = \left| \frac{36 E I}{\alpha l^2} - 1 \right|. \quad (35.7)$$

На решении этого уравнения мы останавливаться не будем^{**)}.

Относительно здесь поставленной задачи можно отметить и в ряде других исследований, однако не практическое значение в общем виде вычисления, поскольку массой конструкции обычно нельзя пренебречь по сравнению с массой груза.

Вариант 3. Здесь постановка задачи противостоит предыдущей — задача решается в предположении, что динамический эффект связан с инерцией самой балки; при этом давление груза на балку считается равным его весу.

^{*)} Жозеф Валентин Буссенкс (1842—1899) — автор ряда работ по теории упругости, член Парижской Академии наук с 1886 г.

^{**)} В связи с преобразованием Кошикова в первом двух членах правой части было показано, что «универсальная» переменная ξ не существует и все дело в искусстве математика. Л. В. Беркович обратил внимание авторов на тотчас же, после утверждения, поскольку в работе Кумара, а в софистике Луизелли и Альфредо указали достаточно общие пути преобразования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и (в зависимости от постоянных коэффициентов) (тогда же после этого утверждения) можно выразить в докладах Нью). Впрочем, кем-то из авторов на Буссенкс эти пути.

Наиболее полное решение этой задачи о движущейся с идеальной балкой А. Н. Крыловым в 1905 г.; оно имеет большое практическое значение и допускает многоплановый обобщенный вывод задачи динамики. Так, А. Н. Крылову принадлежит также решение задачи о действии на балку движущейся пульсированной силы (действие неуравновешенных колес локомотива на мост).

В решениях А. Н. Крылова масса балки считается непрерывно распределенной по длине. Наряду с этим наиболее точным решением известны приближенные решения, основанные на сосредоточении массы балки в одном или нескольких сечениях.

Вариант 4. Учитываются как масса груза, так и масса балки. Это наиболее сложная постановка задачи встречается уже в некоторых исследованиях, выполненных в прошлом веке. Однако первые попытки решения такой задачи были грубо приближенными и мало убедительными в своих обоснованиях. Первые точные результаты в этой области относятся лишь к тридцатим годам нашего века; полученные решения представлены в виде рядов.

Сравнительные подсчеты приводят к любопытному выводу: если скорость движения нагрузки настолько велика, что статические расмотрения (вариант 1) становятся недостаточными, то, как правило, влияние инерции сооружения и инерции груза имеют один и тот же порядок (если груз не имеет ресор; в противном случае инерция груза играет незначительную роль).

К рассмотрению включено также Ю. М. Майский в работе «О величине динамического коэффициента для балок при действии подвижной нагрузки» (Сб. научных трудов Днепропетровского металлургического института, 1930, вып. 24).

Работа А. Н. Крылова «Über die statischen Schwingungen von reibungslos gleitend auf einer Balken» была опубликована в 1905 г. (Mathematische Annalen, 1905, т. 61); результаты А. Н. Крылова воспроизведены в большинстве курсов теории колебаний и динамики сооружений.

Эффективный метод одностороннего учета массы подвижной нагрузки и массы сооружения был дан в работе Штайнбеккер А. «Schwingungen von Trägern bei bewegter Lasten» (Ingenieur-Archiv, 1935, т. 6). См. также с. 200—204 статьи В. В. Болотова «Динамическая реакция упругих систем» (Иж. Гостехиздат, 1939).

§ 36. Ошибка Бресса

В задаче о действии движущегося груза траектория движения груза и изогнутая ось балки, конечно, суть совершенно разные кривые. Сосчитать эти различные

кривые не раз служило причиной ошибок; о них и будет рассказано ниже.

В 1859 г. Бресс опубликовал решение задачи о движении точечного груза вдоль двухсторонней невесомой балки (см. предыдущий параграф, второй вариант). Суть расуждений Бресса сводится к следующему (см. рис. 35.1). Для момента времени, когда груз находится посредине балки, Бресс записываетгибающий момент в середине пролета в виде

$$M = \frac{Pl}{4} + \frac{Nl}{8} + \frac{v^2}{g}. \quad (35.1)$$

Первый член правой части выражает влияние груза, а второй — влияние его силы инерции. Далее Бресс имеет известное в сопромате уравнение состояния

$$M = \frac{EI}{\rho}. \quad (35.2)$$

и, исключив из полученной системы пару уравнений радиус кривизны ρ , находит

$$M = \frac{Pl}{4 - \frac{v^2}{g\rho^2}}.$$

Это решение обнаруживает своеобразное влияние скорости нагибающие моменты M , и частности, как будто позволяет найти критическую скорость

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{4gEI}{Pl}}, \quad (35.3)$$

при которой нагибающие моменты в прогибах стремятся к бесконечности.

Это удивительно простое решение, однако не верно из-за допущенной Брессом ошибки; возможно, читатель ее уже заметил.

Мы введем в виду откровенности смысла символы ρ , входящих в уравнения (35.1) и (35.2); одной из той же буквы в этих уравнениях обозначены совершенно различные величины. В первом уравнении, по смыслу записи, ρ — радиус кривизны траектории груза при прохождении им середины балки, а во втором ρ — радиус кривизны оси балки и тот же момент времени.

Для устранения существенной разницы между этими величинами рассмотрим рис. 35.1. Для времени попадания груза на ось балки в различные моменты времени; здесь же показаны соответствующая балочная деформация

груза (точки 1, 2, 3, 4); стреловой линией показана траектория груза (для ясности отмечены состояния, относящиеся к движению груза только вдоль левой половины балки).

Покажем, что изогнутая ось Φ соответствует моменту прохождения груза через середину. Величина ρ , входящая в формулу (36.2), представляет собой радиус кривизны изогнутой оси (при $x=l/2$), тогда как величина



Рис. 36.1. Форма изогнутой балки при движении подвижного груза (сплошная линия) и траектория груза (стреловая линия)

ρ , входящая в формулу (36.1), представляет собой радиус кривизны траектории (также при $x=l/2$).

Таким образом, Бресс отожествляет две разные величины: на рис. 36.1, видно, что две кривые — траектория и изогнутая ось — совершенно различны.

Эти кривые различны, конечно, и при статической постановке задачи. Оценка указанное различие, полагая весь процесс безмерным. Пользуясь элементарными методами сопротивления материала, найдем выражение для кривизны изогнутой оси балки ($0 \leq x \leq l/2$), когда груз находится посередине балки (т. е. $x=l/2$):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{P}{4EI} \quad (36.4)$$

Немного сложнее нахождение кривизны траектории груза. Для случая, когда груз P находится на расстоянии a от левой опоры, уравнение изогнутой оси балки на участке от Φ до a имеет вид

$$y = -\frac{Px(a-x)(2a^2-x^2-x^2)}{4EI}$$

Если здесь положить $a=l$, то получится уравнение, описывающее прогибы балки под грузом P :

$$y = -\frac{Px^2(l-x)^2}{4EI} \quad (36.5)$$

т. е. уравнение траектории груза. Отсюда следует выражение для кривизны траектории груза:

$$\frac{1}{\rho} = y'' = -\frac{P}{3EI}(2l^2 - 12lx + 12x^2) \quad (36.6)$$

В момент, когда $x=l/2$, имеем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{P}{3EI} \quad (36.7)$$

Таким образом, ошибочно отождествленные кривизны двух разных кривых при $x=l/2$ отличаются в 1,33 раза. Хотя эта оценка относится к чисто статической задаче, она дает общее представление о возможных размерах ошибки.

Любопытно, что эта допущенная ошибка имела рецидивы. В одном из замечаний по теоретической механике приводился следующий пример:

«Паровоз весом $P=180$ тс проходит по мосту со скоростью $v=72$ км/ч. В тот момент, когда паровоз находится на середине моста, прогиб моста равен $\lambda=0,1$ м. Определить дополнительное давление на мост в этот момент, принимая, что мост можно рассматривать как линейную мостовую однопролетную балку постоянного сечения длиной $l=100$ м, с шарнирно закрепленными концами, и приобретает размеры паровоза».

Далее приводится ответ:

$$\frac{12Mv^2}{g^2 l^3} = 0,88 \text{ тс.}$$

Судя по условиям, здесь ставится задача Виллиса (см. § 35), приводящая к сложному дифференциальному уравнению (35.3). Включение такой задачи в задания, рассчитанный на студентов, вызывает удивление.

Дело, однако, в том, что составитель, во-видимому, полагал допустимым перейти к простому, но ошибочному решению Бресса, о котором шла речь выше. Вот как выглядит это решение в данном случае. Если сосредоточенная сила N приложена в середине пролета двухопорной балки, то кривизна изогнутой оси определяется известным выражением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{8I}{4EI} \quad (36.8)$$

а прогиб в середине пролета — выражением

$$\lambda = \frac{Nl^3}{48EI} \quad (36.9)$$

Применительно к обсуждаемой задаче под N следует понимать полное давление груза, т. е. сумму веса P и центробежной силы

$$N = P + \frac{mv^2}{r} \quad (36.10)$$

Из уравнений (35.8) и (35.9) можно найти кривизну

$$\frac{1}{\rho} = \frac{12\delta}{l^2}. \quad (36.11)$$

Отсюда как будто следует, что искомое дополнительное давление, равное центробежной силе, составляет

$$\frac{m v^2}{\rho} = \frac{P}{g} \cdot \frac{12\delta}{l^2} = 0,88 \text{ тс}. \quad (36.12)$$

Особенность этого решения состоит в том, что выражение (36.11) определяет закон не кривизну траектории груза, пущеную для подставки в выражение (35.10), а кривизну изогнутой оси балки.

Важнейшими исследователями даже во времена Бresse особенно чувствительна разница между двумя кривыми. На рис. 36.2 воспроизведен чертеж из опубликованной в



Рис. 36.2. Чертеж из статьи Ренда

1861 г. статьи французского инженера Ренда. Он сопроводил этот чертеж следующими пояснениями.

Пусть в моменте t груз находится в точке a . За отрезок времени Δt этот груз переместится в точку a' , если кривая ось балки останется неизменной; но самым тем, за отрезок времени Δt крайняя ось балки изменит свое положение и груз окажется в точке a . Здесь отчетливо видна разница между элементом aa' изогнутой оси балки и элементом aa' траектории груза.

Решение Бresse привязано к книге: *Essai de mécanique appliquée*, 1859, Paris (т. 1, гл. VI). Задача о первом можно найти в ряде проектов голландской задачица И. В. Мейерского (см., например, М., 1959, 256-я ед., задача 620); ее решение, авторское название Бresse, дано Г. Нойбером в книге: *Abhandlung zur Aufgabensammlung Maschinenbau* (VEB-Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1961). Статья Ренда была опубликована через два года после выхода в свет книги Бresse в *Annalen der Physik et Chemie*, 1861, 1-й том, с. 145—151.

§ 37. Бегущая изгибающая волна

В общей постановке задачи о действии подвижной нагрузки на упругие системы необходимо учитывать массу как нагрузки, так и самой конструкции. Если пренебречь

любым из этих влияний, то решение окажется более или менее приближенным; таковы первые три варианта из указанных в § 25. Однако можно указать две особые задачи, возникающие в некотором смысле исключение. В одной из них никакой роли не играет масса подвижной нагрузки, а во второй — масса самой конструкции. Этот параграф посвящен первой задаче; вторая задача рассматривается в следующем параграфе.

Пусть груз весом P равномерно движется со скоростью v вдоль бесконечной балки, лежащей на сплошном однородном упругом основании (рис. 37.1, а).

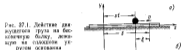


Рис. 37.1. Действие движущегося груза на бесконечную балку, лежащую на сплошном упругом основании

Отличительной чертой этой задачи является возможность стационарного режима движения, при котором прогиб под грузом остается все время постоянным, а груз движется по горизонтали. Картина изгиба оси балки будет неизменной, но равномерно движущейся со скоростью движения груза и как бы сопровождающей в v груз (рис. 37.1, б). Поэтому для наблюдателя, связанного с последним, изгиб балки будет выглядеть все время одинаково; это позволяет назвать такое явление *бегущей изгибающей волной*.

Наряду с этим возможны также свободные колебания балки около этого стационарного режима; их последствием мы заниматься не будем.

Так как вертикальная координата груза остается неизменной, то вертикальное ускорение груза равно нулю, а давление груза на балку равно весу P . В этом и состоит особенность рассматриваемой задачи.

Основание балки будем считать линейно деформируемым и следующим образом Волжара:

$$r = -ky, \quad (37.1)$$

где r — интенсивность реакции основания, y — прогиб, k — коэффициент пропорциональности, характеризующий

жесткость основания и иногда называемый коэффициентом податли. Известно, что эта модель абсолютична и недержителась строгой критике в задачах статки балок на упругом основании. Тем не менее мы воспользуемся этой моделью и пойдем еще дальше по пути идеализации, считая, что упругое основание является лишь жестким и демпфирующим. Таким образом, упругость останется единственным физическим свойством, которым обладает используемая дальше модель упругого основания.

Пусть z — абсцисса текущего сечения балки, отсчитываемая от некоторого неподвижного начала координат, t — время, m — масса единицы длины балки; тогда дифференциальное уравнение изгиба балки записывается в форме

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - ky. \quad (37.2)$$

Здесь правая часть представляет собой интенсивность нагрузки и состоит из двух членов: инерционной нагрузки и реакции упругого основания.

Перепишем уравнение (37.2) в форме

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + by = 0, \quad (37.3)$$

где

$$2\alpha = \frac{m}{EJ}, \quad b = \frac{k}{EJ}. \quad (37.4)$$

Решение этого уравнения будем рассматривать в виде

$$y = f(z - at). \quad (37.5)$$

Здесь аргумент $\xi = z - at$ представляет собой абсциссу текущего сечения балки, отсчитываемую от подвижного начала координат, совмещенного с грузом. Новой задачей является выяснение вида вновь введенной функции f .

Если обозначить штрихами дифференцирование этой функции по ее аргументу $\xi = z - at$, то нужные нам производные функции y запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = f''(\xi), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 f''(\xi). \quad (37.6)$$

Теперь уравнение в частных производных (37.3) переходит в следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$f^{(4)} + 2a^2 f'' + bf = 0. \quad (37.7)$$

Линейное дифференциальное уравнение (37.7) имеет постоянные коэффициенты, и мы, не задерживаясь на

подробности его простого решения, приведем окончательные результаты. Для той части бегущей волны, которая расположена впереди движущегося груза (т. е. при $\xi > 0$):

$$f = e^{-\alpha\xi} (C_1 \sin \beta\xi + C_2 \cos \beta\xi) + e^{+\alpha\xi} (C_3 \sin \beta\xi + C_4 \cos \beta\xi). \quad (37.8)$$

Здесь величины α и β определяются через коэффициенты уравнения (37.7) по формулам

$$\alpha = \sqrt{\frac{b - a^2}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{b + a^2}{2}}. \quad (37.9)$$

Для другой части волны (при $\xi < 0$) уравнение поперечной оси имеет ту же форму:

$$f_1 = e^{-\alpha\xi} (D_1 \sin \beta\xi + D_2 \cos \beta\xi) + e^{+\alpha\xi} (D_3 \sin \beta\xi + D_4 \cos \beta\xi), \quad (37.10)$$

но, конечно, с другими значениями постоянных.

Для определения восьми постоянных C_i и D_i , входящих в выражения (37.8) и (37.10), воспользуемся следующими условиями.

При $\xi = \pm \infty$ прогибы f и f_1 должны быть конечными, а при $\xi = 0$ (под грузом)

$$\begin{aligned} f(0) = f_1(0), \quad f'(0) = f_1'(0), \\ f''(0) = f_1''(0), \quad f'''(0) = f_1'''(0) = \frac{P}{EJ}. \end{aligned} \quad (37.11)$$

Из условий на бесконечности находим

$$D_3 = D_4 = C_3 = C_4 = 0.$$

Для определения остальных постоянных служат условия (37.11); с их помощью получаем

$$\begin{aligned} C_1 = -D_1 = -\frac{P}{2EJ\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}, \\ C_2 = D_2 = -\frac{P}{2EJ\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, бегущая волна имеет симметричную форму, и для анализа полученных результатов достаточно рассмотреть, например, часть волны при $\xi \geq 0$:

$$f = -\frac{P e^{-\alpha\xi}}{2EJ(\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha \sin \beta\xi + \beta \cos \beta\xi). \quad (37.12)$$

Наибольший интерес представляет значение прогиба под грузом, т. е. при $\xi=0$:

$$f(0) = -\frac{P}{2EJ\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)}. \quad (37.13)$$

Для того чтобы выявить влияние скорости v на величину $f(0)$, подставим сюда выражения параметров α и β , данные в формулах (37.9); тогда найдем

$$f(0) = -\frac{P}{EJv^2 \sqrt{2}(1 - \alpha^2)}. \quad (37.14)$$

В частности, при $v=0$, т. е. в случае неподвижного груза, получим известный результат для статического прогиба f_s , под силой, приложенной к бесконечно длинной балке на упругом основании. Отношение $f(0)/f_s$ можно назвать коэффициентом динамичности; при учете (37.4) он оказывается равным

$$\mu = \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{v_{кр}^2}}{1 - \sqrt{2} \frac{v^2}{v_{кр}^2}}}. \quad (37.15)$$

Из этой формулы непосредственно видно, что с ростом скорости v коэффициент динамичности увеличивается и при скорости

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{2EJ\alpha_0^2}{m}} \quad (37.16)$$

стремится к бесконечности. Наибольшее значение скорости является критическим.

При значениях v , меньших критического, бегущая волна имеет форму искаженной синусоиды, с убывающей амплитудой. Затушение амплитуд определяется множителем $e^{-\beta x}$ в уравнении (37.12). С приближением скорости к ее критическому значению параметр α согласно первой формуле (37.8) уменьшается и при критической скорости становится равным нулю. Соответственно этому кривая (37.12) обнаруживает все меньшее затушение и при критической скорости становится чистой синусоидой.

Разумеется, в этом результате нужно остановиться с осторожностью: хотя бы потому, что в них не отражены инерционные и деформирующие свойства основания, которые будут проявляться тем более заметно, чем быстрее движется груз и чем динамичнее весь процесс в целом, — в особенности при скоростях, близких к критическим. Тем не менее полученные решения качественно верно от-

ражает тенденцию прогибов и увеличению при росте скорости движения груза.

Автором приведенного решения является В. Л. Бадерман (изданию Голованова С. Д., Вадерман В. Л., Локерея К. К., Маслова В. М., Филомет В. Н. Основы современной теории расчета на прочность и надежность. — М.: Машино, 1952, с. 198—200).

§ 38. Действие равномерно распределенной движущейся нагрузки

В предыдущем параграфе рассмотрен особый случай действия подвижной нагрузки, в котором масса груза не имела никакого значения. Здесь мы остановимся на другом столь же особом случае, в котором, однако, не играет роли масса упругой конструкции.

В отличие от рассмотренных выше задач, где речь шла о движении одиночного груза, обратимся к анализу действия бесконечной полосы равномерно распределенной



Рис. 38.1. Действие равномерно распределенной движущейся нагрузки

нагрузкой q , движущейся вдоль балки с постоянной скоростью v (рис. 38.1). Эта система может находиться в квазистатическом состоянии, которому соответствует неизменяемое во времени кривая нагиба балки. Одновременно эта кривая является также траекторией движения элементов полосы нагрузки. Вследствие кривизны траектории сила действия элемента подвижной нагрузки на балку не равна его весу, а определяется суммой веса $q \, dx$ и силы инерции $-\frac{x}{g} \frac{d^2x}{dt^2}$ (g — прогиб балки, ρ — радиус кривизны, $\frac{d^2x}{dt^2}$ — вертикальное ускорение элемента нагрузки). Если ρ — интенсивность собственного веса балки, то интенсивность полной нагрузки на балку составляет

$$q + \rho - \frac{x}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = q + \rho - \frac{\rho}{g} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \rho. \quad (38.1)$$

Соответственно этому дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} = q + \rho - \frac{\rho}{g} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \rho. \quad (38.2)$$

Если принять начало координат на левом конце балки, то решение дифференциального уравнения (38.2) можно записать в форме

$$y = \frac{(v+g)^2}{4EJ^2} \left\{ \frac{1}{2} (z^2 - lz) + \frac{v}{4v} \left[\frac{\cos \left(\frac{2z}{l} - 1 \right) v}{\cos v} - 1 \right] \right\}, \quad (38.3)$$

где обозначено

$$v = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}. \quad (38.4)$$

В частности, наибольший прогиб балки (в середине пролета) оказывается равным

$$y \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{(v+g)^2 l^3}{32EJ^2} \left\{ \frac{2}{v^2} \left(\frac{1}{\cos v} - 1 \right) - 1 \right\}. \quad (38.5)$$

Как видно, он увеличивается с ростом скорости v и стремится к бесконечности при $v \rightarrow \pi/2$. Таким образом, скорость

$$v = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{gEI}{\rho S}} \quad (38.6)$$

является критической. Можно заметить, что эта формула совпадает с формулой (4.48), найденной в § 4 при исследовании устойчивости трубопровода, для которого подвижной нагрузкой является текущая жидкость.

Такими в общих чертах основные свойства квазистатического режима, характеризующегося неизменностью во времени кривой изогнутой оси балки. Для исследования его устойчивости нужно изучить движение, которое будет совершать система около квазистатического режима, если он будет нарушен каким-либо возмущением.

При этом движение изогнутой оси уже не будет оставаться неизменной во времени, а ее уравнение представит собой функцию двух переменных

$$y = y(z, t), \quad (38.7)$$

Соответственно меняется сила инерции элемента самой балки, а сила инерции подвижной нагрузки будет отличаться сложнее, чем в случае квазистатического режима.

Интенсивность сил инерции балки определяется через частную производную

$$r_p = - \frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (38.8)$$

Для определения сил инерции подвижной нагрузки необходимо учитывать, что координата z элементов нагрузки сама зависит от времени:

$$z = vt,$$

поэтому проекция скорости элемента подвижной нагрузки на ось y равна полной производной

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial t} v,$$

Аналогично вертикальное ускорение элемента подвижной нагрузки следует записать в виде

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial z} v \right).$$

Первое слагаемое дает

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} v,$$

второе слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial z} v \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} v + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \frac{dz}{dt} v = \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} v^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} v^2.$$

Таким образом, полное ускорение равно

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} v^2,$$

а, следовательно,

$$r_p = - \frac{\rho}{g} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} v^2 \right).$$

Теперь вместо уравнения (38.2) получится

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + a \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} + b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad (38.9)$$

где

$$a = \frac{E+g}{gJ^2}, \quad b = \frac{2\rho v}{gJ^2}, \quad c = \frac{\rho v^2}{gJ^2}. \quad (38.10)$$

Часто третье слагаемое уравнения (38.9) относительно мало, а в одном случае даже точно равно нулю^{*)}. Поэтому ограничимся решением упрощенного уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + a \frac{\partial y}{\partial z} + c \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (38.11)$$

^{*)} Это — случай истинного двоякого движения двух потоков нагрузки со скоростью v и $-v$ вдоль дуговой оси балки (движения вдоль оси в противоположные стороны друг другу).

Этому уравнению в граничных условиях шарнирного опирания удовлетворяет функция

$$y = A \sin \frac{\alpha x}{l} \sin pt, \quad (38.12)$$

где p — угловая частота колебаний, $\alpha=1, 2, \dots$. Подставляя (38.12) в (38.11), получим

$$\left(\frac{\alpha l}{T}\right)^4 - \alpha^2 p^4 - c \left(\frac{\alpha l}{T}\right)^4 = 0. \quad (38.13)$$

Отсюда найдем собственные частоты системы

$$p = \sqrt{\frac{\frac{\alpha l}{T}}{\alpha} \left(\frac{\alpha l}{T} \right)^4 - c \left(\frac{\alpha l}{T} \right)^4}. \quad (38.14)$$

Важно заметить, что она зависит от скорости движения нагрузки. Критическим следует считать состояние, когда собственная частота обращается в нуль. Это состояние определяется условием

$$\left(\frac{\alpha l}{T}\right)^4 - c \left(\frac{\alpha l}{T}\right)^4 = 0. \quad (38.15)$$

Отсюда

$$c = \left(\frac{\alpha l}{T}\right)^4. \quad (38.16)$$

т. е. критическая скорость протекания жидкости равна

$$v_{кр} = \frac{\alpha l}{T} \sqrt{\frac{EJ}{\alpha}}. \quad (38.17)$$

и ее наименьшее значение (при $\alpha=1$) совпадает с результатом (38.6).

Решение задачи для квазистационарного режима дано Бресом в книге, упомянутой на с. 318.

В статье X. Замон и Г. Кавасаки «Вибрация колеблющейся трубы, содержащей текучую жидкость (Journal of applied mechanics, 1952, № 3) получены решения при составлении уравнения дифференциального уравнения задачи. См. об этом в статье В. И. Философова «О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости (Изв. об-ва Инжен. АН СССР, 1951, т. X). Более полный анализ проблемы см. в статье Ф. И. Мухомова «Динамический критерий устойчивости трубы, проводя с протекающей жидкостью (Изв. АН СССР, Механика, 1952, № 3) и А. А. Мельникова «Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости» (ИЖМ, 1953, т. 23, вып. 4, с. 765—769).

О колебаниях нити при вращении движущейся ейской нити, см. в книге И. Н. Голдштейна «Современные проблемы колебаний и устойчивости механических сооружений» (М.: Гостехиздат, 1947).

Большой труд посвящена статье И. Каннингема «Погорелое взаимодействие вращающихся гибких телесных шаров» (Сб. «Теория механики и динамика», посвященный 70-летию И. И. Артоболевского. — М.: Наука, 1974, с. 170—178).

Напомним читателю, что с задачами аэроупругости мы уже встречались в § 4 гл. I, где рассмотрена статическая и потеря устойчивости при действии аэродинамических сил. Здесь речь пойдет о специфике динамической задаче теории аэроупругости.

§ 39. О динамических задачах теории аэроупругости

При динамической постановке задачи об аэроупругой неустойчивости наряду с аэродинамическими и упругими силами в рассмотрение вводятся также силы инерции и исследуется процесс движения во времени. Это позволяет установить такие области потери устойчивости упругих конструкций, выходящие в область газа, которые нельзя указать при статическом анализе. Чаще всего динамическая потеря устойчивости наступает при скоростях меньших, чем критические скорости, вычисляемые на основе статических представлений; это делает особенно важным изучение динамических задач аэроупругости.

Наглядную характеристику различных типов задач аэроупругости дает схема, изображенная на рис. 39.1.

В вершинах символического треугольника буквами A , U и H отмечены все три элементарных случая, участвующих в анализе аэроупругости. С вершинами треугольника широкими линиями связаны четыре кружка, соответствующие определенным типам задач. Если учитываются только силы упругости (U) и силы инерции (H), то мы приходим к задаче о свободных колебаниях механической системы (точка M на рис. 39.1).

При решении задач о дивергенции мы учитывали только аэродинамические (A) и упругие (U) силы; такой постановке отвечает кружок с буквой D на рис. 39.1.

Задачи динамики полета местного самолета обозначены на рис. 39.1 буквами DU ; в нижней книге, посвя-



Рис. 39.1. Символическая схема Каландра

ациной деформированным системам, эти задачи не рассматриваются.

В каждом из перечисленных случаев учитываются только две категории сил. Наиболее полной постановка задач аэроупругости предусматривает одновременный учет всех трех категорий сил (буква Ф на рис. 39.1) *). Буква Ф означает флаттер — одно из наиболее опасных аэроупругих явлений.

Вот что пишет о развитии аварии в тридцатых годах нашего века один из крупнейших специалистов в области летных испытаний самолетов:

«С появлением новых скоростных самолетов в авиации едва ли не всех передовых стран мира произошла волна тангенциальных взрывоопасных катастроф.

Случайные оцепенения, наблюдавшие у нас катастрофы с землей, видели во всех случаях почти одинаковую картину: самолет летел совершенно нормально, ничто не внушало ни малейших опасений, как вдруг внезапно как-то неведомая сила, будто коряком, разрушила машину — и вот уже падают на землю изуродованные обломки: крылья, оперение, фюзеляж...

Все оцепенения, не связывавшиеся между собой, правильно выражены — верны, так как не представляли себе других возможных причин столь внезапного и полного разрушения. Однако осмотр упавших обломков не подтверждал этой версии: никаких следов коряма — корота или оцепов — во них не обнаруживалось.

Самым надежным источником информации — докладов экипажей потерпевшего аварии самолета — воспользоваться, как правило, — удавалось. Те же, несчастливцы буквально единичных летчиков, которым удалось выбраться из стремительно летящих вниз, беспорядочно вертикальных обломков фюзеляжа и воспользоваться парашютом, ничего сказать-нибудь существенного добавить к рассказам наземных очевидцев не могли. Очень уж несомненно и быстро развивались события: всего за несколько секунд до катастрофы ничто не предвещало ее, а затем сразу — удар, треск, грохот, и самолет разлетается на куски!

*). Такие представления нескольких взаимосвязанных задач с помощью одной схемы было предложено Колларом в 1928 г. Мы воспроизвели здесь лишь часть слов Коллара и не отметили некоторые другие моменты, также весьма катастрофические с помощью результатов Коллара.

Новому громоу явление было дано название «флаттер» (от английского flutter — трепетать), но еще, если не ошибемся, Мольер сказал, что большому не делается легче от того, что он знает, как называется его болезнь по-латыни.

Одна за другой приходили тревожные вести о тангенциальной гибели французских, английских, американских скоростных самолетов.

Не миновала она герцога Чича и Каса.

Таким образом, мысли инженеров и летчиков еще не разобрались в причинах описанного громоу явления. Лишь после глубоких теоретических исследований, а также после глубоких испытаний удалось установить, что флаттер — это проявление динамической неустойчивости, когда возмущенное движение представляет собой упругие колебания со стремительно возрастающими амплитудами. Важно, что свойства неустойчивости зависят от скорости полета — система, устойчивая при малых скоростях, становится неустойчивой после того, как скорость достигла некоторого критического значения.

Основные трудности исследования флаттера воздушных поверхностей самолета связаны со сложностью описания аэродинамически сил: возможность различного моделирования этих сил привела к нескольким вариантам теории флаттера. Анализ явления флаттера крыла, основанный на так называемой калываляндондровой теории, был выполнен Р. Фроаером и В. Дунканом, М. Раушером и Е. П. Гроссманом в 1928—1937 гг. Более тонко аэродинамические силы описываются в калываляндондровой теории классического флаттера, которая применяется и к изучению колебаний лоптки турбины.

Вследствием явились другие ситуации, которые потребовали разработки особых подходов к анализу аэродинамической неустойчивости. В частности, обнаружилось, что при действии ветра возможна аэродинамическая неустойчивость крупных низ-серных сооружений. Так, в 1940 г. по этой причине произошла одна из крупнейших аварий — обрушение Такомского моста; как выяснилось, в данном случае имели место аэродинамическая неустойчивость особого вида, называемая сврежым флаттером; подобные явления с особой силой проявляются в случаях обтекания упругих конструкций потоком воздуха (в частности, турбинных валовых лопток).

После второй мировой войны в связи с развитием ракетной техники интенсивно развивались теории нелиней-

алю флаттера — наличие возмущенной неустойчивости панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. В последнее время большое внимание уделяется родственным вопросам гидроупругих колебаний.

Перечисленные вопросы обсуждаются в следующих параграфах этой главы, — конечно, в сугубо обобщенном виде.

Литература, относящаяся к различным типам флаттера, будет указана в конце каждого из следующих параграфов. Приведенный ниже список литературы дан по заказам Института летательных аппаратов СССР, Троицкого Советского Союза Н. Л. Галкина (ИТЭИ им. М. В. Ломоносова, г. Троицк, 1960, № 7, с. 112).

Особо возмущенной является ст. в книге А. С. Волынского «Общая теория жидкости и газа» (М.: Наука, 1970).

§ 40. «Классический» флаттер

Для выяснения природы классического флаттера рассмотрим колебания предельно упрощенной модели упруго закрепленной пластинки, изображенной на рис. 40.1; предполагается, что горизонтальное перемещение невозможно. В отличие от схемы, принятой при изучении дивергенции (рис. 4.9), пластинка имеет две степени свободы, и ее положение характеризуется двумя координатами — углом поворота φ и вертикальным перемещением y середины пластинки. Обе координаты являются функциями времени:

$$\varphi = \varphi(t), \quad y = y(t). \quad (40.1)$$

Нашей задачей является определение вида зонк функций и затем — оценка возможности флаттера.

Размер пластинки в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, обозначим через l ; коэффициенты жесткости упругих опор c_1 и c_2 будем относить к единице длины пластинки в указанном направлении. Положим также, что масса пластинки распределена равномерно, и обозначим через m массу, соответствующую единице площади срединной плоскости пластинки.

На пластинку при ее движении действует поперечная сила

$$Y = \frac{dx_p}{dt} \varphi \frac{\rho v^2}{2} l, \quad (40.2)$$

приложенная на расстоянии a от правого края пластинки, а также реакции упругих опор, пропорциональные перемещениям краев пластинки:

$$R_1 = -\left(x + \frac{b}{2} \varphi\right) c_1 l, \quad R_2 = -\left(x - \frac{b}{2} \varphi\right) c_2 l \quad (40.3)$$

Принимая эти реакции в центре тяжести пластинки, получаем силу

$$R = R_1 + R_2 = -(c_1 + c_2) by - \frac{b}{2}(c_1 - c_2) b\varphi \quad (40.4)$$

и пару с моментом

$$M = -\left(x + \frac{b}{2} \varphi\right) c_1 l \frac{b}{2} + \left(x - \frac{b}{2} \varphi\right) c_2 l \frac{b}{2}. \quad (40.5)$$

Составим дифференциальные уравнения движения. Одно из них описывает вертикальное движение центра тяжести пластинки

$$Y + R = m\ddot{y}, \quad (40.6)$$

а другое — поворот пластинки

$$Y\left(a - \frac{b}{2}\right) + M = \frac{m l^2}{12} \ddot{\varphi}. \quad (40.7)$$

Подставляя сюда выражения (40.2), (40.4) и (40.5) для Y , R и M , получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + a_{11}y + a_{12}\varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + a_{21}y + a_{22}\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (40.8)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{c_1 + c_2}{mb}, & a_{12} &= \frac{b(c_1 + c_2)}{mb} + 6 \frac{dx_p}{dt} \cdot \frac{\rho v^2}{2} \cdot \frac{b - 2a}{mb^2}, \\ a_{21} &= \frac{6c_1 - c_2}{mb} - \frac{dx_p}{dt} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{1}{m}, & a_{22} &= \frac{6c_2}{mb} \cdot \frac{c_1}{c_2}. \end{aligned} \quad (40.9)$$

Решение полученной свёрнутой системы будем разбивать в виде

$$y = A e^{i\omega t}, \quad \varphi = B e^{i\omega t}. \quad (40.10)$$

После подстановки этих выражений в (40.8) получим

$$\begin{aligned} A(-\omega^2 + a_{11}) + B a_{21} &= 0, \\ A a_{11} + B(-\omega^2 + a_{22}) &= 0. \end{aligned} \quad (40.11)$$

При движении пластины не может быть, чтобы A и B одновременно равнялись нулю; из этого следует, что равно нулю определитель системы уравнений (40.11):

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + a_{11} & a_{21} \\ a_{11} & -\omega^2 + a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (40.12)$$

т. е.

$$\omega^2 - \omega^2 (a_{11} + a_{22}) + (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{11}) = 0. \quad (40.13)$$

Отсюда находим

$$\omega^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{11})}. \quad (40.14)$$

Для устойчивости системы нужно, чтобы все четыре значения ω были вещественными; в свою очередь для этого требуется, чтобы оба значения ω^2 были действительными и положительными.

Условие действительности ω^2 имеет вид

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{11} \leq \left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2, \quad (40.15)$$

а условие положительности ω^2

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{11} \geq 0. \quad (40.16)$$

Таким образом, для устойчивости рассматриваемой системы нужно, чтобы разность $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{11}$ располагалась в интервале $0 \leq (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{11}) \leq \left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2$. Критическим состоянием соответствуют границы этого интервала, т. е. равенства

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{11} = 0, \quad (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{21} a_{11} = 0. \quad (40.17)$$

Если подставить в первое из этих равенств выражения (40.9), то можно найти критическую скорость

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2c_1 a_2}{\rho \frac{d^2}{dx^2} (a_2 \beta - c_1 (1 - \beta))}}. \quad (40.18)$$

где $\beta = \omega b$.

При $\omega = v_{\text{кр}}$ согласно (40.14) получается два значения ω^2 .

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = a_{11} + a_{22}.$$

Неустойчивость определяется значением $\omega_2^2 = 0$, которому соответствует постоянное отклонение системы от положения исходного равновесия, т. е. дивергенция. В самом деле, если в (40.18) положить $c_1 \rightarrow \infty$, т. е. вернуться к рассмотренной в гл. I пластине, то получится следующее тем значение критической скорости (4.13). Отметим, что дивергенция может наступить только при условии $c_1 > > c_1 (1/\beta - 1)$ — в противном случае выражение (40.18) оказывается мнимым. Если скорость v больше с в о р о с т и дивергенция, то разность, стоящая в левой части (40.18), становится отрицательной и получается мнимые значения для ω . Этому частному решению соответствует монотонный уход системы от положения равновесия.

Обратимся теперь ко второму равенству (40.17). Подставляя в него выражения (40.9), найдем критическую скорость, отличающуюся от значения (40.18):

$$\begin{aligned} v_{\text{кр}} &= \frac{2}{\beta - 1} \sqrt{\frac{c_2 - \sqrt{c_2^2 - (c_1 - c_2)(c_1 + c_2)(\beta - 1)^2}}{2\rho \frac{d^2}{dx^2}}}, \\ c_2 &= c_1 \beta - c_1 (1 - \beta). \end{aligned} \quad (40.19)$$

Когда скорость v приближается к значению (40.19), подкоренное выражение в (40.14) стремится к нулю и в пределе превращает уравнение двух значений ω^2 . При увеличении скорости сверх значения (40.19) подкоренное выражение в (40.14) становится отрицательным, ω^2 — комплексное число, а движение приобретает характер колебаний с возрастанием амплитуды. Таким образом, выражение (40.19) определяет скорость флаттера.

Дальнейшее исследование может показать, что для возникновения флаттера необходимо, чтобы жесткость правой опоры была достаточно мала по сравнению с жесткостью левой опоры — иначе по выражению (40.19) не получится действительного значения скорости флаттера. В общем это условие противостоит условию возникновения дивергенции.

На рис. 40.2 кривыми $y = y(x)$ иллюстрированы оба варианта неустойчивости; здесь точками обозначены центры тяжести пластинок, а крестиками — их центры жесткости (центром жесткости называется точка пластины, обозначаемая тем свойством, что приложенная к ней вертикальная сила вызывает только вертикальное перемещение пластины; если же пластинка нагружается парой, то поворот пластины происходит вокруг центра

жесткости). Конечно, для того чтобы наступала неустойчивость того или иного вида, необходимо, чтобы скорость потока достигала соответствующих критических значений. Это заключение справедливо и для реальных самолетных

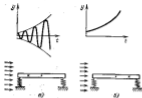


Рис. 40.2. Влияние положения оси жесткости на тип структуры устойчивости

крыльев; чтобы исключить возможность флаттера, мы всегда стремимся сделать так, чтобы центры тяжести сечений находились вперед центров жесткости.

Известно несколько видов классического флаттера несущих поверхностей самолета, причем одним из необходимых условий возникновения такого флаттера является



Рис. 40.3. Перегибание сечения крыла при изгибно-крутильном флаттере

наличие нескольких степеней свободы колебательной системы. Типичным видом флаттера крыла самолета является изгибно-крутильный флаттер; при исследовании возможности его появления учитывают изгиб и закручивание крыла.

На рис. 40.3 изображены перемещения y и ϕ сечения крыла самолета, которые существуют при исследовании изгибно-крутильного флаттера. Если принять во внимание

лишь только изгиб или только закручивание крыла, то колебательную неустойчивость обнаружить не удастся *).

Конечно, полученные выше результаты нельзя рассматривать как количественно точные даже для такой простой системы, как упруго опертая пластинка. Дело в том, что аэродинамические нагрузки в действительности зависят не только от угла атаки, как мы это предположили, но также и от скорости перемещения. Чтобы понять, как это происходит, рассмотрим, например, стому, изображенную на рис. 40.4, а, и предположим, что пластинка, наклоненная к направлению потока под углом α_0 , поступательно движется перпендикулярно потоку со скоростью v_0 .

В этом случае аэродинамические силы будут такими, как если бы пластинка оставалась неподвижной, а частицы воздуха имели бы кроме основной горизонтальной скорости v_0 вертикальную скорость v_1 , направленную вверх — см. рис. 40.4, б.

Поэтому относительно скорости v направлена, как показано на рис. 40.4, в, и эффективным углом атаки является угол между направлением вектора v и плоскостью пластинки, равный

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{v_1}{v_0},$$

где α_0 — видимый угол атаки, т. е. угол между направлением скорости v_0 и плоскостью пластинки (выражение (40.20) записано в предположении, что скорость v_1 значительно меньше скорости v_0 и, следовательно, допустимо отбрасывание тангенса малого угла и самого угла). Поскольку аэродинамические силы определяются не видимым углом атаки α_0 , а эффективным углом атаки α , то, в отличие от уравнений (40.8), в уравнения движения

* При малых скоростях движения и малом среднем угле атаки может возникнуть флаттер крыла треугольной формы в плане, связанный с упругими перемещениями только одного вида. Таким образом, возможно существование чисто аэродинамического флаттера и не только с учетом отбрасывания и включением флаттера.



Рис. 40.4. Влияние вертикальной скорости на эффективный угол атаки

рядом с самим функциями y и φ и их вторыми производными войдут также их первые производные. Впрочем, при увеличении теории можно также учитывать присоединенные массы воздуха, которые несколько изменят значения инерционных коэффициентов в уравнениях движения.

Проблема флаттера в аэродинамике рассматривается в работах Т. Кармана и М. Био «Аэродинамический метод в инженерном деле» (М.: Гостехиздат, 1948, с. 199—202) и Н. Равада «Устойчивость в авиации» (М.: ИЛ, 1950, с. 78—99). В последней книге является и более полное изложение теории флаттера, но еще лучше это сделано в книге Э. П. Физа «Введение в теорию аэроупругости» (М.: Физматгиз, 1959) и Р. Л. Весселгаффа, Х. Эппа, Р. Л. Хаффмана «Аэроупругость» (М.: ИЛ, 1959).

См. также книгу В. В. Болотина «Нелинейные задачи упругой устойчивости» (М.: Физматгиз, 1951), где, в частности, можно найти библиографические ссылки на основополагающие работы в области классической флаттера.

Простыми задачами аэроупругости также исследованы здесь и учебные пособия по теоретической механике — см., например, «Сборник задач по теоретической механике для студентов К. С. Колмогорова» (М.: Наука, 1952).

§ 41. Панельный флаттер

Состояние равновесия трехместной панели, обтекаемой потоком газа, при достаточно больших скоростях потока может оказаться неустойчивым, причем, как и для самолетного крыла, возможна потеря устойчивости в виде дивергенции и в виде флаттера. Первый случай можно исследовать статическим методом Эйлера, а второй случай требует изучения свойств возмущенного движения.

При существенных упрощающих предположениях (цилиндрический изгиб, справедливость формулы теории в § 4 была найдена критическая скорость дивергенции для консолидной пластинки

$$v = 6,33 \frac{D}{b^2} \quad (41.1)$$

(обозначения см. на с. 35). В настоящем параграфе мы займемся определением критической скорости флаттера для такой же пластинки.

Возвращаясь к рис. 4.9, мы, как и в § 4, будем полагать изгиб пластинки цилиндрическим и примем, что местное давление пропорционально проекции местной относительной скорости потока на нормаль к изогнутой поверхности пластинки. В статической задаче о дивергенции, когда пластинка неподвижна в изогнутом состоя-

нии, местное давление определяется выражением $-k v \frac{dy}{dx}$ ($y = y(x)$ — проекция точек срединной поверхности).

В рассмотренной здесь динамической задаче $y = y(x, t)$ и нужно учесть собою также вертикальные скорости точек пластинки $\dot{y} = \dot{y}(x, t)$, так что местное давление будет определяться выражением $-k \left(v \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \right)$. Соответственно этому дифференциальное уравнение колебаний пластинки приобретает вид

$$D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k v \frac{\partial y}{\partial x} + k \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (41.2)$$

(D — цилиндрическая жесткость, m — интенсивность массы пластинки). В принципе решение этого линейного уравнения несложно и состоит в следующем. Положим

$$y = Y(x) e^{i\lambda t}. \quad (41.3)$$

Здесь λ — характеристический показатель; от знака его вещественной части зависит характер изучаемого движения. Подставляя (41.3) в (41.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$D Y'' + k v Y' + (m \lambda^2 + k) Y = 0, \quad (41.4)$$

частное решение которого имеет вид

$$Y = C e^{i\lambda x}. \quad (41.5)$$

Подстановка (41.5) в (41.4) приводит к уравнению

$$D \lambda^2 + k v \lambda + m \lambda^2 + k = 0. \quad (41.6)$$

Далее нужно найти корни λ , полученного уравнения, или, точнее говоря, выразить их через параметры системы и найти соответствующую величину k . (Заметим, что речь идет об уравнении четвертой степени, читатель, конечно, сразу представит себе, насколько непросты эти вычислительная задача.) Затем следует образовать общее решение уравнения (41.4) в виде суммы

$$Y = \sum_{i=1}^4 C_i e^{\lambda_i x} \quad (41.7)$$

и подчинить его граничным условиям

$$Y''(0) = 0, \quad Y'''(0) = 0, \quad Y(l) = 0, \quad Y'(l) = 0. \quad (41.8)$$

В результате получится система четырех однородных уравнений для постоянных C_i . Условие существования

нормального решения приведет к трансцендентному уравнению для характеристического показателя λ . После этого можно перейти к анализу влияния скорости ω на знаки вещественных частей корней полученного уравнения. Наименьшее значение скорости, при которой появляется положительная вещественная часть, есть скорость флаттера; повышение чисто мнимого корня будет означать возникновение дивергенции.

К сожалению, на этом пути немало трудностей вычислительного характера; хотя она были успешно преодолены в одной из основополагающих работ А. А. Мозмана (1956), однако, следуя принятому в настоящей книге стилю, мы приведем далее В. В. Волотинина более простое приближенное решение, основанное на методе Бубнова — Галеркина.

Решение уравнения (41.2) ищем в виде конечной суммы

$$y = q_1(t) Y_1(t) + q_2(t) Y_2(t) + \dots + q_n(t) Y_n(t), \quad (41.9)$$

в которой $q_i(t)$ — выбранные (заданные) базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи и условиям ортогональности $\int_0^1 Y_i Y_j dx = 0$, $q_i(t)$ — искомого функции времени. Для определения функций $q_i(t)$ служат соотношения Бубнова — Галеркина

$$\int_0^1 LY_1 dx = 0, \quad \int_0^1 LY_2 dx = 0, \quad \dots, \quad \int_0^1 LY_n dx = 0, \quad (41.10)$$

в которых $L = L(\sum q_i Y_i)$ — левая часть уравнения (41.2) после подстановки в нее вместо y суммы (41.9). Число таких соотношений равно числу членов, которое принято в сумме (41.9). В результате получается система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно функций времени q_i .

Таким образом, с помощью метода Бубнова — Галеркина выполняется переход от системы с распределенными параметрами к системе с конечным числом степеней свободы, для которой функции $q_i(t)$ служат обобщенными координатами.

Ограничимся двумя членами суммы (41.9) и раскнем дополнительно упростить решение, опуская последний член уравнения (41.2); тогда соотношения Бубнова — Га-

леркина (41.10) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} q_1 &= 0 \\ \ddot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2 + a_{21} q_2 &= 0, \end{aligned} \quad (41.11)$$

где

$$a_{ij} = - \left(\frac{D}{D\tau} \int_0^1 Y_i^T Y_j dx + \frac{h\omega}{\pi} \int_0^1 Y_i Y_j dx \right) / \int_0^1 Y_i^2 dx. \quad (41.12)$$

Заметим, что полученные уравнения совпадают с уравнениями (40.8), в которых мы пришли в предыдущем параграфе к задаче о классическом флаттере; можно сразу заключить, что скорость дивергенции определяется соотношением

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0, \quad (41.13)$$

а скорость флаттера — равенством

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12} a_{21} = 0. \quad (41.14)$$

Для того чтобы воспользоваться этими условиями, нужно остановиться на определенном выборе базисных функций Y_i , а затем вычислить коэффициенты a_{ij} по выражению (41.12). В частности, в качестве Y_i можно (и естественно) принять собственные формы колебаний той же консольной пластины в пустоте:

$$\begin{aligned} Y_1 &= (\sin \alpha_1 x + sh \alpha_1 x) (\cos \alpha_1 b + ch \alpha_1 b) - \\ &- (\cos \alpha_1 x + ch \alpha_1 x) (\sin \alpha_1 b + sh \alpha_1 b), \end{aligned} \quad (41.15)$$

которые удовлетворяют дифференциальному уравнению задачи о свободных колебаниях при цилиндрическом изгибе

$$Y_1^{IV} - \alpha_1^2 Y_1'' = 0 \quad (41.16)$$

и граничными условиями

$$Y_1'(0) = 0, \quad Y_1^{IV}(0) = 0, \quad Y_1(b) = 0, \quad Y_1'(b) = 0. \quad (41.17)$$

В выражениях (41.15) — (41.16) $\alpha_1 b = 1,8751$, $\alpha_2 b = 4,6941$ (см. таблицу, третья строка таблицы в начале § 26).

При этом согласно (41.12) находим

$$\begin{aligned} a_{11} &= 12,362 \frac{D}{\pi b^3} - 2,000 \frac{h\omega}{\pi b^2}, \\ a_{22} &= -61,702 \frac{D}{\pi b^3}, \quad a_{12} = 0,058582 \frac{h\omega}{\pi b^2}, \\ a_{21} &= 485,50 \frac{D}{\pi b^3} - 2,000 \frac{h\omega}{\pi b^2}. \end{aligned} \quad (41.18)$$

При этом условии (41.13) приводит к квадратному уравнению для скорости дивергенции

$$c^2 - 130,77 \frac{D}{2g^2} c + 788,22 \left(\frac{D}{2g^2} \right)^2 = 0. \quad (41.19)$$

Оба корня полученного уравнения положительны, так что практически важен только меньший корень

$$c_{кр} = 6,33 \frac{D}{2g^2}, \quad (41.20)$$

значение которого совпадает с найденным выше точным значением (41.3). Это совпадение результатов точного и приближенного решений позволяет надеяться, что и скорость флаттера будет определена из условия (41.14) с достаточной точностью^{*)}.

Подставляя (41.18) в условие (41.14), получим соотношение

$$\left(-473,16 \left(\frac{D}{2g^2} \right)^2 - 14,458 \left(\frac{D}{2g^2} \right) \right)^2 = 0, \quad (41.21)$$

из которого следует два значения для скорости флаттера

$$c_{кр} = \pm 134,44 \frac{D}{2g^2}. \quad (41.22)$$

Положительный корень практического интереса не представляет, так как если $c > 0$, то согласно (41.20) раньше флаттера возникнет неустойчивость типа дивергенции.

Здесь можно существование отрицательного корня, показывающего, что флаттер возможен и при $c < 0$, когда ветер направляет от защемления к свободному краю пластинки; при таком направлении потока дивергенция невозможна и флаттер является единственным типом аэроупругой неустойчивости пластинки.

Таким образом, сокращение всего двух членов в сумме (41.9) позволило получить вполне удовлетворительные результаты для скоростей дивергенции и флаттера. Можно ожидать, что с увеличением числа членов в (41.9) точность результатов будет повышаться, а с увеличением этого числа — понижаться. Не только любопытно, но и важно, что, приняв в (41.9) всего один член, мы в принципе могли бы возмозможность найти скорость флаттера, хотя для скорости дивергенции получилось бы довольно приемле-

мое приближение. В самом деле, приняв один член в сумме (41.9), мы приходим к одному уравнению

$$\bar{a}_1 + a_{11} \bar{a}_1 = 0,$$

и условие неустойчивости примет вид

$$a_{11} < 0.$$

При учете выражения (41.19) очевидно следует единственное значение критической скорости (скорости дивергенции)

$$c_{кр} = 6,18 \frac{D}{2g^2};$$

колебательная неустойчивость этим решением не удаляется.

Короче говоря, для обнаружения колебательной неустойчивости необходимо учитывать по крайней мере две степени свободы, как и в задаче о классическом флаттере.

Посмотрим, как изменится характер выкладок и результаты вычислений, если сохранить в уравнении (41.2) последнее слагаемое, которое было опущено при переходе к (41.11). Удерживая по-прежнему сумму двух членов в разложении (41.9) вместо (41.11), получим систему уравнений (обозначим кратко)

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 + \frac{h}{m} \bar{a}_1 + a_{11} \bar{a}_1 + a_{12} \bar{a}_2 &= 0, \\ \bar{a}_2 + \frac{h}{m} \bar{a}_2 + a_{21} \bar{a}_1 + a_{22} \bar{a}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (41.23)$$

Разделивая решение системы (41.23) в виде

$$\bar{a}_1 = C_1 e^{\lambda t}, \quad \bar{a}_2 = C_2 e^{\lambda t}, \quad (41.24)$$

приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0, \quad (41.25)$$

в котором

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \frac{h}{m}, & A_2 &= \frac{h^2}{m^2} + a_{11} + a_{22}, \\ A_3 &= \frac{h}{m} (a_{12} + a_{21}), & A_4 &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \end{aligned} \quad (41.26)$$

Для того чтобы пластинка была устойчива, вещественные части всех корней уравнения (41.25) должны быть отрицательными; это приводит к условиям Гурвица, о которых шла речь на с. 128.

$$\begin{aligned} A_1 > 0, & \quad A_1 A_2 - A_3 > 0, \\ A_1 A_2 A_3 - A_4 - A_1 A_4 > 0, & \quad A_1 > 0. \end{aligned} \quad (41.27)$$

^{*)} Можно ожидать, что преобразование последнего слагаемого в уравнении (41.2) приводит к дополнительной погрешности в значении скорости флаттера.

Отметим, что условие $A_2 > 0$ определяет найденную в (41.20) критическую скорость дивергенции. Из остальных условий Гурвица самым жестким оказывается предпоследнее, которое приводит к следующему уравнению для критической скорости:

$$2 \frac{H^2}{\pi^2} \left(497,89 \frac{D}{\pi b^2} - 4 \frac{H_0}{\pi b} \right) + \left(473,16 \frac{D}{\pi b} \right)^2 - 14,458 \left(\frac{H_0}{\pi b} \right)^2 = 0. \quad (41.28)$$

Значения отрицательного корня этого уравнения представлены на рис. 41.1. Конечно, в это более полное решение следовало бы дальше учесть — не только путем

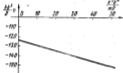


Рис. 41.1. Зависимость безразмерной критической скорости флаттера от параметров плавки

увеличения числа членов суммы (41.9), но и путем учета в явном виде свойств материала плавки; о принципиальном значении этого обстоятельства упоминалось в конце § 16.

Это сделали Г. Г. Денюков и В. В. Новиков, которые установили, что при весьма малом внутреннем трении скорость панелевого флаттера приблизительно в 2,5 раза меньше, чем вычисленная в предположении, что внутреннее трение полностью отсутствует.

Упомянутая выше лобовая теория позволяет установить условия возникновения панелевого флаттера, но по самой своей природе не дает возможности предсказать последующее развитие колебаний. Как показывает дальнейшее исследование, после достижения критического состояния амплитуды панелевого флаттера сначала быстро возрастают, но потом — благодаря увеличивающейся роли нелинейности *) — рост колебаний постепенно

замедляется и, наконец, полностью останавливается. В принципе не исключено, что амплитуды установившихся колебаний при равенстве панелевого флаттера окажутся относительно небольшими и не создадут ни непосредственной угрозы прочности конструкции.

Если исследование классического флаттера обычно мыслится только на определение критической скорости и потому допускает для H и b и y и u постановку, то исследование панелевого флаттера нередко ориентировано на решение вопроса о том, как задан — только после этого можно оценить, а самым ли деле опасна колебательная неустойчивость, возникающая после достижения критической скорости панелевого флаттера (нельзя забывать об угрозе устойчивого разрушения!).

В заключение отметим, что в некоторых случаях поток газа (жидкости) может оказать действие, противоположное описанному, а именно — стабилизировать упругую систему, которая в отсутствие потока неустойчива. Например, критическое напряжение сжатия для плавки, обтекаемой потоком, может оказаться больше, чем в неподвижной среде (разумеется, при скорости потока меньшей, чем критической). В некотором смысле этот эффект похож на столь же неожиданное стабилизирующее действие вихряной, о котором было сказано в § 34.

Среди первых публикаций в области панелевого флаттера отметим работу А. А. Мораева «О колебаниях пластины, движущейся в газе» (ПММ, 1955, т. 20, № 2); см. также книгу В. В. Волгодина «Нелинейные задачи упругой устойчивости» (М.: Физматгиз, 1963). Возникновение стабилизированного вихряющего потока отмечено в докладе Э. Н. Прокопова, Р. П. Лажера и Л. Г. Шадрова на Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек (Киев, 1954 г.). См. также книгу А. С. Вальтера «Устойчивость деформируемых систем» (М.: Физматгиз, 1957). «Нелинейная динамика пластины и оболочек» (М.: Наука, 1972). «Оболочки в газовой жидкости и газе» (М.: Наука, 1976) и доклад В. В. Волгодина «Стабилизированная и destabilизирующая эффекты и нелинейные деформируемые системы» (VI Всесоюзный конгресс по аэродинамике, Вильнюс, 1977).

Работы Г. Г. Денюкова и В. В. Новикова «О влиянии внутреннего трения на устойчивость одномерных упругих систем» опубликованы в сб. «Динамика систем», вып. 3, Изд-во Горьковского ун-та, 1975.

§ 42. Такомская авария; срывной флаттер

Вместе с тем обладают рядом технических, экологических и эстетических достоинств по сравнению с конструкциями мостов других типов. Многие из них пред-

*) В первую очередь — связанной с нелинейностью лобовых углов при входе вихревых потоков в контур плавки.

сталкиют собой замечательные инженерные сооружения, а наибольшие пролеты пересыты именно вислыми мостами. Однако уже давно было замечено, что вислые мосты весьма ненадежны при сильном ветре, и история мостовой техники знает ряд обрушений висельных мостов в сильные бури.

В 1859 г. рухнул мост Ларен-Бернар (Франция), висельный пролет 196 м. Мост вскоре был восстановлен и снова обрушился в 1871 г. Спустя всего два года обрушился мост пролетом 346 м через реку Огайо у города Уиллинг. Вот как это событие описывает очевидец: «В течение нескольких минут мы следили с тревогой за колебаниями, подобными качке корабля в шторм. Одна раз мост поднялся почти на высоту вышек и затем опустился; при этом вдоль всего пролета произошло скручивание, и одна половина проезжей части почти перевернулась. Затем огромная конструкция с колоссальной силой устремилась в раку с ужасным треском и грохотом. Следующие крупные катастрофы произошли в 1864 г. в 1889 г. с висельными мостами через реку Ниагару. Пролеты мостов составляли соответственно 320 и 386 м.

Обстоятельства катастроф известны не вполне достоверно, за исключением только того, что все они происходили в сильную бурю и на предельном или чрезвычайно больших колебаниях. Эти аварии насторожили инженеров, но не воспретившая строительство новых висельных мостов; их продолжали строить, особенно в тех случаях, когда было необходимо перекрыть большие пролеты.

Вот как выглядит таблица рекордных пролетов, перекрытых висельными мостами в XX веке:

1903 г.	— 488 м (Вальденбург),
1926 г.	— 533 м (р. Делавэр),
1929 г.	— 563 м (Детройт),
1931 г.	— 1067 м (р. Гудзон),
1938 г.	— 1280 м (Сен-Франциско),
1964 г.	— 1298 м (Нью-Йорк).

Летом 1940 г. было закончено строительство Такового моста, висельного третий в мире по величине пролет (854 м). Так как в этой местности не ожидалось большого движения, то в целях экономии мост был построен очень узким (11,9 м), и проезжая часть была рассчитана только на два ряда автомобилей. Полотно моста было подвешено на двух стальных канатах, диаметром 46 см каждый, со стрелой провеса 70,7 м (рис. 42-1).

Сразу после постройки моста обнаружилась его большая чувствительность к действию ветра, вызывавшего большие колебания с амплитудами, доходившими до полутора метров. Было сделано несколько попыток устранить этот внушительный тревожа недостаток различными конструктивными мерами (приведением дополнительных связей и установкой гидравлических демпферов на палонах).

Однако это не предотвратило катастрофы, которая произошла 7 ноября 1940 г. Начиная с 8 ч утра наблюдалась из очень сильных вертикальные колебания моста с частотой 0,6 Гц. Примечательно, что ветер имел не слишком большую скорость — около



Рис. 42-1. Таковоый мост постройки 1940 г.

17 м/с, тогда как до этого были случаи, когда мост без определенной противостоял более сильному ветру.

Около 10 ч утра скорость ветра несколько возросла (до 18,7 м/с), установились одноузловые изгибно-крутильные колебания со значительно меньшей частотой (0,2 Гц) и весьма большими амплитудами: когда закрутка достигала максимума, проезжая часть наклонилась в горизанту под углом 45°. Резкое изменение частоты колебаний произошло, по-видимому, вследствие образования каких-то новых связей в конструкции. Мост выдерживал эти колебания около часа, после чего большой участок проезжей части полотна отломился и упал в воду.

Любопытно, что авария Такового моста удалось запечатлеть на киноленте; этот уникальнейший фильм дал чрезвычайно много ценного материала для исследования причин обрушения.

На рис. 42-2 воспроизведен один из кадров этого фильма, показывающий состояние моста за полчаса до разрушения. Здесь отчетливо виден изгибно-крутильный характер колебаний.

Крупные Такового моста естественно привлекло огромное внимание исследователей. Почти немедленно после катастрофы Т. Карман опубликовал расчет критической скорости дивергенции Такового моста;

по вычислению Кармана эта скорость оказалась равной 22,2 м/с*). Однако разрушение Такюмского моста произошло бесспорно вследствие колебаний, и поэтому анализ аэродинамической неустойчивости требовал не статической, а динамической постановки задачи.

Впоследствии было сделано несколько попыток избежать разрушение Такюмского моста с помощью классического флаттера конструкции. Однако в последнее время общед-



Рис. 42.2. Колыхания средней части Такюмского моста перед обрушением

примание получило другое объяснение, связанное с особыми аэродинамическими эффектами.

Если в потоке воздуха (жидкости) находится плоское обтекаемое препятствие, то за ним образуется вихревая след, причем вихри сбегают с определенной периодичностью, зависящей от формы и размеров конструкций, а также от скорости потока. Так, например, при обтекании цилиндра образуется вихревая дорожка, изображенная на рис. 42.3. Направление сбегающих с цилиндра вихрей попеременно меняется, а угловая частота отделения вихрей определяется выражением

$$\omega = \frac{0,22v}{2R} c^{-1}, \quad (42.1)$$

* Если уж говорить о рекордах, то нельзя не отметить, что самой работоспособной, вероятно, была все рекорды выдержавшая — от начала строительства до даты обрушения — сталь длиной всего четыре метра дель!

где v — скорость потока (м/с), D — диаметр цилиндра (м); коэффициент 0,22 представляет собой число Струмала для данного типа обтекаемой конструкции. В результате отделения вихрей на цилиндр действует периодическая сила, перпендикулярная направлению потока. Закон изменения этой силы во времени можно принять в виде

$$F = c_v \frac{\rho v^2}{2} S \sin \omega t. \quad (42.2)$$

Здесь S — площадь проекции препятствия на плоскость, перпендикулярную направлению потока, c_v — коэффициент, зависящий от формы препятствия (для кругового



Рис. 42.3. Вихревая дорожка

цилиндра $c_v=1$). Чем хуже обтекаемость конструкции, тем больше коэффициент c_v и соответственно больше амплитуда силы F .

Значительные колебания упругих конструкций, связанные со срывом вихрей, называются срывным флаттером.

Срывному флаттеру подвержены лопасти воздушных винтов и лопасти турбомашин при достаточно больших углах атаки, а также некоторые инженерные сооружения, находящиеся в ветровом потоке, — высотные мосты, высокие или наклонные трубопроводы, конструкции башенного типа и т. п. Как теперь установлено, причиной обрушения Такюмского моста явился именно срывной флаттер; можно думать, что во-за срывного флаттера произошли и более ранние аварии других высоких мостов. Известен случай, когда заводская стальная труба высотой 90 м пришла в состояние сильных резонансных колебаний при скорости ветра около 80 км/ч; сильные повреждения трубы заставили заменить ее верхней частью, а вместо гидравлические демпферы в систему оттяжек.

Еще большие периодические силы развиваются в случае, когда конструкция обтекается не воздухом, а потоком большой плотности (например, потоком воды). Неоднократно наблюдались резонансные колебания пере-

скопии подводных лодок при скоростях около 8 км/ч. Размах колебаний был весьма значительным, так как нераска предстает собой весьма гибкую конструкцию, длина которой может в 25—30 раз превосходить диаметр. Такие колебания не только приводят к разрыву изображения, получаемого с помощью перископа, но и угрожают его прочности.

Срывной флаттер представляет собой сложное явление, в котором, в частности, заключены в обычных саморезных колебаниях, вызываемые силой (42.2). Однако в срывном флаттере можно заметить в чертах аэродинамической точки зрения в прямом смысле этого термина. Одна из возможных



Рис. 42.4. Сила переменного параметрического возбуждающего момента

траектор была указана в 1947 г. И. И. Гольдштейном в упрощенно состоит в следующем.

При периодическом отклонении шквер, кроме силы (42.2), направленной перпендикулярно потоку, возникает также периодическая (в первом приближении — гармоническая) сила, действующая на упругую конструкцию вдоль потока. Так, на рис. 42.4 показано действие этой силы $P = P_0 \sin \omega t$ на H-образное сечение балки, ось которой перпендикулярна плоскости чертежа; именно таким было сечение обрванного Таломского моста. Конечно, под действием силы будет происходить вынужденные колебания балки в горизонтальной плоскости; но мы должны обратить внимание на другое обстоятельство — если по какой-либо причине сечение оказалось повернутым (см. штриховку линия на рисунке), то сила P создает крутящий момент, зависящий от времени и пропорциональный углу поворота сечения

$$M = \frac{P_0 l}{2} \varphi \sin \omega t.$$

Внимательный читатель уже здесь отметит, что такой момент представляет собой параметрическую нагрузку α , следовательно, может оказаться причиной

параметрического резонанса. В этом случае уместно говорить об аэродинамической неустойчивости, поскольку действующий на конструкцию момент зависит от ее движения.

При разработке этого варианта теории обычно учитывают, что одновременно с колебаниями кручения происходит колебание погиба и вертикальной плоскости; эти явления сопрягаются игибными колебаниями может оказать некоторое количественное влияние на значение критической скорости, но срывной флаттер типа параметрического резонанса в принципе может возникнуть и при чисто крутильных колебаниях.

В последние время срывной флаттер обычно трактуют как явление автоколебательного характера; для его анализа процесс (в ритм) отклонения вперед можно считать не заданным, а зависящим от движения самой конструкции.

Вопрос, когда им касались в СССР параметрического резонанса в аэродинамическом смысле: Р. Д. Басинский, Е. Уткин и Р. Д. Калинин «Аэродинамика» (М.: ИИ, 1952, с. 541—549), Н. И. Фил «Вопросы в теории аэродинамики» (М.: Физматгиз, 1962, с. 76—78, 364—364), И. Росар «Неустойчивость в аэродинамике» (М.: ИИ, 1958, гл. VII из этой книги была использована рис. 42.2), Ф. Д. Дмитриев «Крутильные колебания сооружений» (М.: Гостройиздат, 1953, с. 41—44), С. И. Дроздов «Аэродинамическая конструкция при отрывном обтекании» (М.: Судостроение, 1959).

Теория срывной дорожки была впервые дана Т. Карвалло в 1911 г. Первую статью Карвалло о Таломском мосте (см. в журнале «Engineering News-Record» (т. 525, 21 ноября 1907 г.). Подробные сведения о экспериментальных исследованиях периодических неустойчивости аэродинамических сооружений в послевоенное время Ф. В. Фуркаровича и его сотрудников «Analytical stability of suspension bridges with special reference to the Tacoma Narrows Bridge» (University of Washington Engineering Experiment Station Bulletin, No 116, 1954).

О срывном флаттере с параметрическим резонансом см. в книге И. И. Гольдштейна «Сложные проблемы колебаний и устойчивости аэродинамических сооружений» (М.: Гостройиздат, 1947), В. В. Болотин «Динамическая устойчивость упругих систем» (М.: Гостройиздат, 1956) и В. А. Язубовича и В. М. Спиринкина «Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами» (М.: Наука, 1972).

Глава IX НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В начале настоящей главы (§ 43) обсуждается вопрос о несовпадении точек малых колебаний и линейных колебаний. Затем в § 44 рассматривается простейшая

задача о самостимуляции. В § 45—46 рассматривается устойчивость стационарных режимов движения механической систем с двумя степенями свободы.

§ 43. Малые нелинейные колебания

Название этого параграфа может вызвать недоумение, поскольку из предположения о малости отклонений механической системы от положения равновесия обычно следует линейность соответствующих дифференциальных уравнений движения; соответственно этому теория линейных колебаний всегда излагается теорией малых колебаний. Неформулируя, но именно подразумеваемое отождествление понятий «малые колебания» и «линейные колебания» можно найти уже в «Аналитической механике» Лагранжа. С таким отождествлением можно встретиться — правда, все реже и реже — и в наши дни. Конечно, — это первоначальное недоразумение.

В действительности в упомянутой теории речь идет именно о линейных колебаниях, т. е. о колебаниях, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, а малость колебаний определяется предположением не является. В некоторых случаях малые колебания (скаль-

юдно малые) описываются в принципе нелинейными уравнениями; существует даже случай — и притом не лишённый практического интереса, — когда нелинейность механической системы проявляется тем более заметно, чем меньше её отклонения от положения равновесия. Иллюстрируем сказанное двумя простыми примерами.

Пример 1. Груз массы m , который может перемещаться



Рис. 43.1. Простейшая колебательная система

без трения по горизонтальной плоскости, упруго закреплён с помощью вертикальной пружины с коэффициентом жесткости c_0 . Требуется найти частоту свободных колебаний системы, если в положении равновесия натяжение пружины отсутствует, а ее длина равна l_0 (рис. 43.1).

Принимая за обобщенную координату горизонтальное перемещение груза q , отсчитываемое от положения равновесия,

затем выразим кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{m\dot{q}^2}{2}.$$

Для определения потенциальной энергии пружины Π прежде всего выразим удлинение пружины через смещение груза

$$\Delta l = \sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0.$$

Следовательно,

$$\Pi = \frac{c_0}{2} (\Delta l)^2 = \frac{c_0}{2} (\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0)^2.$$

Разложив полученное выражение в степенной ряд и имея в виду малые колебания, удержим только первый отличной от нуля член разложения. Тогда потенциальная энергия выразится в виде

$$\Pi = \frac{c_0 x^2}{8l_0}. \quad (43.1)$$

Соответственно этому уравнение Лагранжа

$$m\ddot{x} + \frac{c_0}{4l_0} x^2 = 0 \quad (43.2)$$

оказывается нелинейным. К этому уравнению можно перейти, заменив дифференциальное уравнение поступательного движения груза в проекции на ось x и имея в виду силу упругости пружины $c_0 \Delta l$.

Обнаруженная нелинейность связана с особенностью выражения потенциальной энергии в данном случае. Вообще говоря, для системы с одной степенью свободы разложение потенциальной энергии в ряд имеет вид

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \Pi'(0)q + \frac{1}{2}\Pi''(0)q^2 + \dots \quad (43.3)$$

(q — обобщенная координата). Так как отсчитывая уровень для потенциальной энергии можно принимать произвольно, то далее полагают $\Pi(0) = 0$; кроме того, при отсчете координаты от положения равновесия системы $\Pi'(0) = 0$ и разложение (43.3) обычно начинается с квадратичного слагаемого. Далее из условия малости отклонений системы образуются все члены, кроме первого, который содержит x в квадрате координаты; соответственно уравнение движения оказывается линейным.

В нашем случае после тех же рассуждений в разложении остается член, содержащий четвертую степе-

Если координаты, в уравнении колебаний становятся нелинейными. Таким образом, из предположения о малости колебаний не обязательно следует линейное описание системы.

Возвращаясь к полученному выше уравнению (43.2), отметим, что для частоты свободных колебаний можно получить простое выражение через гамма-функцию

$$p = \sqrt{\frac{R_0}{m}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \frac{A}{k} = 0,5972 \sqrt{\frac{G_0}{m}} \frac{A}{k}, \quad (43.4)$$

в котором A — полуразмах колебаний, определенный начальными условиями. В этом выражении можно видеть проявление одного из характерных свойств нелинейных систем: их неавтономность, т. е. зависимость частоты свободных колебаний от размахов.

Сделаем еще два замечания терминологического характера. Во-первых, мы сознательно пишем частоту свободных колебаний, а не собственную частоту. Последнее выражение известно только для линейных систем, когда частота свободных колебаний определяется исключительно свойствами системы и не зависит от начальных условий. Во-вторых, мы уклонились от применения термина «амплитуда», а выбрали «полуразмах». Дело в том, что во современной терминологической традиции слово «амплитуда» следует применять только в случае гармонических колебаний, тогда как при свободных колебаниях нелинейных систем движение оказывается негармоническим, хотя и периодическим. Впрочем, этому правилу трудно следовать во всех случаях; например, вряд ли стоит применять более полумера вперед название «метод медленного изменения амплитуды» заменить названным методом медленное изменение полуразмахов.

Пример 2. Груз 1 массы m находится между двумя пластинами 2, которые связаны с концами пружины 3 и упираются в неподвижные ограничители 4. В изображении на рис. 43.2, а положение равновесия пружины соответствуют начальному состоянию системы. На рис. 43.2, б показана статическая характеристика системы, т. е. связь между приложенной к грузу статической горизонтальной силой F и соответствующим этой силе горизонтальным перемещением груза. Как видно, эта характеристика состоит из трех участков; средний участок совпадает с осью ординат, а наклон двух крайних участков определяется коэф-

фициантом жесткости пружины c_0 , причем

$$F = c_0 x + P_0 \operatorname{sgn} x. \quad (43.5)$$

Свободные колебания груза около положения равновесия описываются нелинейным дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + c_0 x + P_0 \operatorname{sgn} x = 0. \quad (43.6)$$

Решение этого кусочно-линейного уравнения несложно

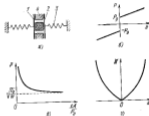


Рис. 43.2. а) Система с параметрами; б) характеристика системы; в) зависимость частоты свободных колебаний от их размахов; г) статическая характеристика системы при $m=0$

и приводит к следующему результату для частоты свободных колебаний (здесь также было бы неуместно писать о собственной частоте):

$$p = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{G_0}{m}} \frac{1}{1 + \frac{c_0 A}{P_0}}. \quad (43.7)$$

Из рис. 43.2, в можно видеть, что при больших колебаниях частота слабо зависит от размахов, неавтономность системы проявляется особенно заметно при малых размахах.

Интересно этот случай мы имели в виду, когда в начале параграфа отмечали, что в некоторых системах нелинейность становится тем более заметной, чем меньше отклонены системы от положения равновесия.

В заключение остановимся на своеобразной зависимости потенциальной энергии от координаты:

$$P = P_0|x| + \frac{c_0^2}{2} \quad (43.8)$$

(см. также график на рис. 43.2, λ) и отметим, что соответствующей положению равновесия минимум потенциальной энергии не является аналитическим. Поэтому было бы грубой ошибкой в данном случае утверждать, что положение равновесия соответствует столь привычному для глаз, но на самом деле не универсальному равенству $P'(0) = 0$.

§ 44. Вибрационное поддержание вращения

В современной технике для некоторых производственных процессов (уплотнение бетонных смесей, прокаточные, виброэлектротранспортные, виброобивка сап и т. д.) широко применяются механические виброисполнители (вибраторы). Основной частью механического вибратора является неуравновешенный ротор, приводимый во вращение электродвигателем.

В типовых виброисполнителях (тройках, дробилках, конвейерах, машинах и др.) обычно устанавливают не один, а несколько механических вибраторов на общем основании; благодаря этому разгружаются подшипники вибратора, являющиеся наименее надежной частью, и достигается большая равномерность распределения возмущающей нагрузки по всему рабочему кругу машины. Согласованная работа нескольких вибраторов требует синхронности вращения и сохранения определенных соотношений между фазами. Для этого, как правило, применяют кинематические связи между роторами вибраторов, например зубчатые или цепные передачи; с их помощью достигается зрительно удельная синхронизация работы нескольких вибраторов.

Однако в последнее время удается использовать также самосинхронизацию роторов — явление автоматического поддержания равенства угловой скорости и фаз отдельных вибраторов при отсутствии кинематических связей.

Явление самосинхронизации известно давно. Еще Гюйгенс во второй половине XVII столетия установил, что двое часов, ходящих по-разному, синхронизируются, когда их устанавливали на достаточно удаленном общем

основании (та легкой балке). Вот как сам Гюйгенс описывает свои наблюдения:

«Манжес этих часов имел длину 9 дюймов и груз подпрута. Механизм приводился в движение гирями, заключенными в ящик вместе с механизмом. Длина ящика была 4 фута. Визу он был отделен от крайней мере 100 футами отсюда... С этого часахи было сделано следующее чрезвычайно интересное наблюдение.

Двое таких часов висели на одной и той же балке, покоящейся на двух опорах. Оба механизма двигались всегда в противоположные стороны, а колебания их так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились. Такими обоим часам было слышно в одно и то же мгновение. Если искусственно нарушить это совпадение, то оно само восстанавливалось в короткое время. Сначала и был поражен этот странным явлением, но, наконец, после внимательного исследования нашел, что причина лежит в незначительном качении самой балки. Колебания механизма сообщают некоторое движение в своем тиске, как бы только они не были. А это движение передается балке, и если манжес сами не двигались в противоположных направлениях, то теперь это произойдет с необходимостью.

Вероятно, это был первый замеченный случай самосинхронизации механических объектов. Аналогичные явления для органов труб в камертонной обшивке в конце прошлого века Рэлей. Подпись — примерно в начале текущего столетия — были открыты явления самосинхронизации в электрических цепях и в некоторых электромеханических системах.

Подобные явления были давно замечены и в небесной механике. Луна обращена к Земле все время одной стороной; это значит, что угловая скорость собственного вращения Луны в среднем равна угловой скорости вращения радиуса-вектора центра Луны (в геоцентрической системе координат). В последнее время такие совпадения объясняют с помощью теории самосинхронизации.

В самосинхронизации можно видеть общее свойство приспособляемости открытых объектов естественного коллектива к ритму работы коллектива в целом. В литературе высказывалась мысль о том, что подобные свойства обладают некоторой универсальностью и присущи, например, даже живым биологическим коллективам.

Явление самосинхронизации мы рассмотрим на простейшем примере двухвibratorной системы (рис. 44.1), когда в сеть включен один вибратор, ротор которого

продвигается с заданной угловой скоростью ω ; неуравновешенный ротор правого вибратора является обычным свободно подвешенным физическим маятником. Оказывается, — и мы в этом убеждаемся, — что в этих условиях ротор правого вибратора свободно вращается с той же угловой скоростью. В данном случае синхронизация осуществляется вибрациями общего основания; последнее служит своеобразной связью между вибраторами, способной согласовать их движения. Подобные слабые связи характерны для всех синхронизирующихся систем.



Рис. 4.1. Угловое возбуждение системы с двумя вибраторами



Рис. 4.2. Схема к составлению дифференциального уравнения движения свободного ротора

Благодаря возбуждению, создаваемому левым вибратором, основание будет колебаться с угловой частотой ω . Следовательно, вертикальные движения точки подвеса можно описать законом

$$y = A \sin \omega t, \quad (44.1)$$

где A — амплитуда колебаний.

Допустим, что составили относительно поворота свободного ротора уравнение; обратимся к составлению уравнения относительного движения. Обозначим: r — радиус вращающегося ротора, ε — эксцентриситет, m — масса ротора, φ — угол поворота ротора, считываемый от оси x по направлению хода часовой стрелки (рис. 4.2). В уравнение моментов относительно колеблющейся оси O' следует включить момент силы тяжести

$$M_g = mg\varepsilon \cos \varphi \quad (44.2)$$

и момент трения, который будем считать пропорциональ-

ным угловой скорости $\dot{\varphi}$:

$$M_f = -b\dot{\varphi}. \quad (44.3)$$

Кроме того, следует учесть, что сама координатная система $xO'y'$ движется относительно неподвижной координатной системы xOy , и поэтому в уравнение моментов необходимо ввести также момент переносной силы инерции. Эта сила направлена по вертикали и равна

$$-m\ddot{y} = mA\omega^2 \sin \omega t, \quad (44.4)$$

так что соответствующая момент составляет

$$M_y = -(mAr^2 \sin \omega t) \varepsilon \cos \varphi. \quad (44.5)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение относительного движения свободного ротора можно записать в виде

$$mI\ddot{\varphi} \cos \varphi - k\dot{\varphi} - mg\varepsilon A\omega^2 \sin \omega t \cos \varphi = mI\ddot{y}. \quad (44.6)$$

где $mI\ddot{y}$ — момент инерции ротора.

В результате мы пришли к весьма сложному нелинейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, которое допускает решение различных типов. Сравнимым вынесением главного вопроса о самосинхронизации: возможно ли вращение ротора с угловой скоростью ω ? Для этого нужно проверить, является ли функция

$$\varphi = \omega t + \alpha \quad (44.7)$$

решением дифференциального уравнения (44.6) (α — постоянная). Приняв закон движения ротора в виде (44.7), мы допустим, что ротор синхронизирован, то движется с некоторым сдвигом фазы α по отношению к колебаниям основания^{*}. Подставив выражение (44.7) в дифференциальное уравнение (44.6), приходим к соотношению

$$mI\omega \cos(\omega t + \alpha) [\dot{\varphi} - A\omega^2 \sin \omega t] = mI\ddot{y}, \quad (44.8)$$

так как здесь левая часть переменна, а правая часть постоянна, то это соотношение, очевидно, тождественно не удовлетворяется. Это означает, что функция (44.7) не является полным решением уравнения (44.6).

Однако этого не следует делать вывод о полной негодности выражения (44.7) для описания движения ротора

* Если вращение совершается с той же скоростью, какой движется основание вибратора, то колебания основания

и можно проверить, нельзя ли рассмотреть функцию (44.7) как приближенное решение дифференциального уравнения (44.6). С этой целью обрисуем выполняемые требования о точности и удовлетворим соотношения (44.8) и заменим его более слабым требованием о выполнении равенства (44.8) в среднем.

Левая часть соотношения (44.8) представляет собой некоторую периодическую функцию времени с периодом $2\pi/\omega$. Поэтому для определения среднего значения этой функции нужно ее проинтегрировать в интервале времени $(0, 2\pi/\omega)$ и результат разделить на значение периода $2\pi/\omega$:

$$\frac{m\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \alpha) (g - A\omega^2 \sin \omega t) dt = \frac{m\omega}{2} A\omega^2 \sin \alpha. \quad (44.9)$$

Принимая полученный результат правой части (44.8), приходим к равенству

$$\frac{m\omega A\omega^2}{2} \sin \alpha = A\omega. \quad (44.10)$$

Таким образом, функция (44.7) является приближенным решением дифференциального уравнения (44.6) при условии, что параметры системы удовлетворяют соотношению (44.10). На последнего следует выражение

$$\sin \alpha = \frac{2k}{m\omega A\omega}. \quad (44.11)$$

Это выражение, с одной стороны, позволяет найти сдвиг фаз, а с другой стороны, — в это самое важное для наших целей — позволяет сформулировать условия синхронизации в виде

$$\frac{2k}{m\omega A\omega} < 1. \quad (44.12)$$

Отсюда видно, что чем больше дебаланс $m\omega$ и скорость вращения оси $A\omega$ ротора, тем легче добьется синхронизации. Единственное обстоятельство, которое может воспрепятствовать синхронизации, — это сопротивление, характеризующее коэффициентом k ; чем оно меньше, тем лучше условия складываются для синхронизации. Наибольшее значение коэффициента сопротивления, при котором еще возможна синхронизация, определяется выражением $k = \frac{m\omega A\omega}{2}$. Ему соответствует момент сопро-

тивления $A\omega$ и потребляемая мощность

$$N = A\omega^2 = \frac{m\omega A\omega^2}{2}. \quad (44.13)$$

Представим себе, что в выключенному из сети ротору приданное устройство, потребляющее энергию. Тогда выражение (44.13) определит мощность, расходуемую в этом устройстве. Так, если дебаланс $m\omega = 1000$ кг·с/см, амплитуда колебаний основания $A = 0,5$ см и основание совершает 3000 колебаний в минуту, то по выражению (44.13) получится шумовая мощность около 800 кВт. Из этого

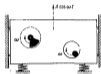


Рис. 44.3. Узкое резонансное устройство с дебалансным электродвигателем

эффект достигается без принудительной синхронизации, без всяких кинематических связей!

Вспомним, что речь идет о приближенном решении. Каково же будет движение ротора в действительности? На этот вопрос дает ответ более точная теория. Установлено, что истинный закон движения ротора имеет вид

$$\varphi = \omega t + \alpha(t), \quad (44.14)$$

где $\alpha(t)$ — периодическая функция времени периода $2\pi/\omega$; ее среднее значение равно нулю. Таким образом, синхронизация осуществляется лишь в среднем, так как на равномерное вращение ротора с угловой скоростью ω накладываются периодические колебания; однако эти колебания относительно невелики, на чем и основан приведенный выше приближенный анализ.

В заключение отметим, что вибрационное поддержание вращения осуществляется и в планетарных вибраторах. На рис. 44.3 изображена схема такого вибратора с цилиндрической втулкой. Главной частью вибратора является цилиндр, свободно вложенный в цилиндрическую полость большего диаметра. При вращении (внутренней) вертикальной корулы цилиндр обкатывает внутреннюю поверхность полости и оказывает действие, подобное действию

дебалансного вибратора. Подобные механизмы могут быть использованы не как возбуждатель колебаний, а в качестве рабочих органов машины. Так, например, на этом принципе работают вибрационные измельчители; при обкатывании шесты массивный цилиндр наминает поступающий в нее материал.

С помощью этой теории Кофе в 1960 г. объяснил природу вращения колеса в жесткой среде — уравнение «сухо-сухо» см. его работу: Coffey T. K. *Rolling: An Example of Helicoidal Motion*. — *American Journ. of Physics*, 1960, 1, 28, 76-79.

О механизме X. Гольдмана см. его «Про меморию по механике» (Изд-во АН СССР, 1951, с. 30—31). Теория самостерсания с большой общностью решения и анализ работ И. И. Валеева. См. его монографию «Самостерсание динамических систем» (М.: Наука, 1971) и «Самостерсание в пружинах и тяжках» (М.: Наука, 1981). О синхронизации движений небесных тел см. книгу В. В. Белоусова «Синхронизация движений звезд» (М.: Наука, 1977).

§ 45. Динамика регулятора Буассо — Сарда

Для равномерности опускания груза на тросе под действием собственного веса французскими инженерами Буассо и Сарда был предложен тороид-регулятор, схема которого изображена на рис. 45.1. На оси AA' укреплен барабан радиусом R с тросом; к нижнему концу троса подвешен груз, который под действием собственного веса опускается вниз. При опускании дополнительная упругость груза опускается без равноускорения. Для того чтобы опускание его было равномерным, на оси AA' сделан кривошип, а на нем упруго подвешен груз регулятора массой m ; коэффициент жесткости пружины равен c . Кроме того,

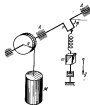


Рис. 45.1. Схема регулятора Буассо — Сарда

в систему введено вязкое демпфирование; коэффициент вязкости равен k . Конструкция такова, что груз регулятора может перемещаться только по вертикали.

Такая система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты естественно принять угол φ поворота вращающегося барабана и вертикальное перемещение y груза регулятора.

При движении системы на груз регулятора действуют три силы: сила тяжести mg , сила вязкости $-ky\dot{y}$ и сила упругости пружины $-c(y-r \sin \varphi)$. Таким образом, дифференциальное уравнение движения массы регулятора имеет вид

$$m\ddot{y} - k\dot{y} - c(y - r \sin \varphi) = m\ddot{y}, \quad (45.1)$$

т. е.

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{c}{m} \sin \varphi + g, \quad (45.2)$$

где обозначено

$$\alpha = \frac{k}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}.$$

Второе дифференциальное уравнение относится к вращению барабана. Так как вертикальное ускорение груза M равно $\ddot{\varphi}R$, то натяжение троса составляет

$$T = M(g - \ddot{\varphi}R).$$

Следовательно, момент силы T относительно оси AA' равен $MR(g - \ddot{\varphi}R)$.

С учетом знаков найдем моменты сил натяжения пружины в виде $c(y - r \sin \varphi) r \cos \varphi$. Таким образом, второе уравнение движения имеет вид

$$MR(g - \ddot{\varphi}R) + c(y - r \sin \varphi) r \cos \varphi = I\ddot{\varphi},$$

где I — момент инерции вала; следовательно,

$$(I + MR^2)\ddot{\varphi} - c(r \sin \varphi) r \cos \varphi = MgR. \quad (45.3)$$

Теперь нам предстоит решить систему нелинейных уравнений (45.2) и (45.3).

Прежде всего выясним, возможно ли равномерное вращение барабана, т. е. проверим, удовлетворяются ли уравнения задачи решению

$$\varphi = \omega t, \quad (45.4)$$

где ω — пока неизвестная постоянная угловая скорость барабана.

Если выражение (45.4) есть решение, то уравнение (45.2) получает вид

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{c}{m} \sin \omega t + g. \quad (45.5)$$

Следовательно,

$$\psi = \frac{r}{V \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega t + \alpha) + \frac{\beta}{\omega_0^2} \quad (45.6)$$

где один фаз определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\zeta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (45.7)$$

Подставим (45.6) в левую часть уравнения (45.3). При условии, что ψ определяется выражением (45.4), имеем $\dot{\psi} = 0$, т. е. первый член левой части (45.3) обращается в нуль, а второй член равен

$$-\varepsilon (p - r \sin \psi) r \cos \psi = -\varepsilon \left[\frac{\omega_0^2 r \sin(\omega t + \alpha)}{V \left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + 4\zeta^2 \omega^2} + \frac{\beta}{\omega_0^2} - r \sin \alpha t \right] r \cos \alpha t. \quad (45.8)$$

Но эта величина — переменная α , следовательно, не удовлетворяет уравнению (45.3), правая часть которого — постоянна. Отсюда вытекает, что выражение (45.4) не удовлетворяет системе уравнений задачи, т. е. строго равномерное опускание груза невозможно.

Тем не менее можно попытаться найти приближенное решение, согласно которому угловая скорость барабана незначительно колеблется около некоторого среднего значения ω . Для определения ω достаточно принять, что среднее значение функции (45.8) равно постоянной правой части уравнения (45.3).

Среднее значение выражения (45.8) представляется одним членом и равно

$$-\frac{\omega_0^2 \beta}{2V \left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + 4\zeta^2 \omega^2} \sin \alpha = -\frac{\sigma^2 \omega \sin \alpha}{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\zeta^2 \omega^2} \quad (45.9)$$

(в последней выкладке вместо $\sin \alpha$ уже подставлено выражение, вытекающее из соотношения (45.7)). Таким образом, вместо (45.3) получим

$$\frac{\omega \sin \alpha}{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\zeta^2 \omega^2} = \frac{N_0 R}{\sigma^2}. \quad (45.10)$$

Это и есть уравнение для определения средней угловой скорости барабана.

Для графического решения построим графики обеих частей уравнения (45.10), которые обозначим через z и z^* (рис. 45.2); точки пересечения линий z и z^* определят вещественные корни уравнения (45.10). На рис. 45.2 по-

каким случаем, когда таких точек — две. Чем больше вес опускаемого груза, тем выше проходит прямая z^* . При достаточно большом весе вообще не происходит пересечения графиков z и z^* ; в этих случаях предположение $\omega = \text{const}$ даже приблизительно не оправдывается, т. е. равномерное (или, лучше сказать, равномерное в среднем) опускание груза вообще невозможно.

Для того чтобы регулятор соответствовал своему назначению, нужно добиваться достаточно большого расстояния между прямой z^* , например, путем увеличения радиуса кривошипа r или уменьшения радиуса барабана R .

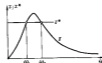


Рис. 45.2. Графическое решение уравнения (45.10)



Рис. 45.3. К исследованию устойчивости привода

Допустим, что параметры регулятора подобраны надлежащим образом и прямая z^* движется пересекать кривую z . Но тогда возникает вопрос: какое из двух движений осуществится — с меньшей частотой ω_1 или с большей частотой ω_2 ? Ответ на этот вопрос связан с устойчивостью каждого из двух найденных режимов работы.

Для изучения об устойчивости возьмем z уравнения (45.3); заменим в нем второй член его среднее значением (45.9) в положении $\psi = \alpha$, получим после деления на σ^2

$$\frac{1 + MR^2}{\sigma^2} \ddot{\omega} + \frac{N_0 R}{\sigma^2} \dot{\omega} - \frac{\omega \cos \alpha}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + 4\zeta^2 \omega^2} \omega = 0,$$

или, проще,

$$\frac{1 + MR^2}{\sigma^2} \ddot{\omega} + \omega = \omega^* - \alpha. \quad (45.11)$$

В условиях стационарного режима, при $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_2$, обе части равны нулю. Что произойдет, например, если угловая скорость ω несколько уменьшится в точке равновесия $\omega_1 - \Delta \omega_1$? Из рис. 45.3 видно, что в этом случае

$\omega^2 > \omega_0^2$; поэтому из уравнения (45.11) следует, что $\omega < \omega_0$, т. е. угловая скорость станет уменьшаться, стремясь восстановить свое невозмущенное значение ω_0 . Если же угловая скорость несколько увеличится и примет значение $\omega_1 + \Delta\omega$, то при этом $\omega > \omega^*$ и из (45.11) получим, что $\dot{\omega} < 0$, т. е. угловая скорость станет уменьшаться, стремясь к значению ω_0 . Из сказанного можно заключить, что режим, соответствующий угловой скорости ω_0 , устойчив.

С помощью уравнения (45.11) можно таким же путем установить, что режим, соответствующий угловой скорости ω_1 , неустойчив.

Интересен ли какое-нибудь практическое значение второй корня $\omega = \omega_1$? Из сказанного выше как будто напрашивается отрицательный ответ. Но в действительности значение ω_1 представляет большой интерес — этим значением

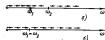


Рис. 45.4. Схематическое представление возможной области допустимых значений угловой скорости: а) при $\omega_1 < \omega_0$; б) при $\omega_1 > \omega_0$.

определяется верхняя граница допустимых возмущений угловой скорости ω . Стационарный режим $\omega = \omega_0$ будет сохраняться лишь в том случае, если возмущения угловой скорости достаточно малы. Если же возмущение настолько велико, что перейдет порог $\omega = \omega_1$, то система выйдет из режима и угловая скорость ω будет неограниченно увеличиваться. Тенденция движения системы можно охарактеризовать стрелками, как это изображено на рис. 45.4, а.

Следовательно, для устойчивой работы регулятора в достаточно широкой области нужно, чтобы значения ω_0 и ω_1 заметно различались. Разность этих значений характеризует запас устойчивости; чем он больше, тем надежнее работа регулятора. В случае, когда $\omega_1 = \omega_0$, система становится «полуустойчивой» (рис. 45.4, б). Поэтому желательна, чтобы прямая σ^* проходила достаточно низко.

Несколько раньше задачи о регуляторе Букста — Сарга привел доктор Н. Рокору (см. 2-е изд. книги «Dynamique generale des vibrations», Paris, 1960, с. 312—318). Более полно исследовал этот вопрос Н. Н. Баранов и Г. К. Демидов (см. их статью «Динамика регулятора Букста — Сарга», — Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 10); в частности, они установили, что при выборе соответствия прямой существует не два,

а три стационарных режима, и в случае бифуркации регуляторной системы переходит от первого режима к третьему (второй режим оказывается неустойчивым).

§ 46. Эффект Зоммерфельда

Обычно считают, что аксиасимметричный вибратор генерирует вынуждающую силу

$$P = P_0 \cos \omega t, \quad (46.1)$$

где $P_0 = m\omega_0^2 r$, ω — угловая скорость вращения оси вибратора, m — неуравновешенная масса, r — ее эксцентриситет. При этом (чуть всего — по крайней мере) предполагается, что значение ω вперед задано и не зависит от процесса колебаний упругой системы, на которой установлен вибратор.

В действительности это не так, и если используется двигатель, обладающий небольшой жесткостью, то процесс колебаний упругой системы заметно влияет на величину ω и последние также колеблются около некоторого среднего значения.

Вследствие обратного влияния колебаний конструкции на угловую скорость вращения вибратора его работа в некотором диапазоне угловых скоростей становится неустойчивой. Ниже излагается управленая теория этого эффекта, который носит имя Зоммерфельда^{*)}, впервые наблюдавшего в 1904 г. неустойчивость на экспериментальной установке.

Рассмотрим колебания электромеханической системы, изображенной на рис. 46.1. Аксиасимметричный привод на вращение эксцентриситетом m_1 , ось которого связана с упруго подвешенной массой M_2 . Предполагается, что масса M_2 может совершать только вертикальные колебания, а малые перемещения оси эксцентрисита компенсируются карданным соединением и не передаются на ось двигателя.



Рис. 46.1. Схема колебательной электромеханической системы

^{*)} Артура Зоммерфельда (1868—1951) — немецкий физик и математик, известнейший ученый-астрономист (с 1925 г.) и известный советский ученый (с 1929 г.) Академии наук СССР. Основатель подразделения космической теоретической физики, в частности квантовой теории, а также космологии и космохимии академика.

Пусть φ — угол поворота ротора и эксцентрика. Оправной пункт дальнейшего рассуждения состоит в том, что колебания массы m_1 зависят от угловой скорости $\dot{\varphi}$ и что момент M , передаваемый статором на ротор, зависит от угловой скорости. Зависимость

$$M = M(\dot{\varphi})$$

называется характеристикой двигателя и определяется его конструкцией и параметрами. Во многих случаях характеристику электродвигателей можно принять в виде линейной функции

$$M = M_0 - a\dot{\varphi}, \quad (46.3)$$

причем величина M_0 зависит от рабочего напряжения.



Рис. 46.2. Характеристика двигателя. При изменении рабочего напряжения прямая перемещается параллельно самой себе



Рис. 46.3. Координатные оси

С помощью ротора можно изменить характеристику двигателя — на графике это отразится сдвижением ее параллельно самой себе (рис. 46.2).

Движение системы в целом определяется двумя координатами — углом φ , о котором уже было сказано, и вертикальным перемещением y массы m_1 ; отсчет перемещения y ведется от положения равновесия (рис. 46.3).

Уравнения движения системы составим в форме Лагранжа и прежде всего образуем выражение кинетической энергии, соответствующей трем элементам системы, которые обладают массой (ротор, масса m_1 и масса m_2).

Кинетическая энергия ротора равна

$$T_2 = \frac{I_1 \dot{\varphi}^2}{2}, \quad (46.4)$$

где I_1 — момент инерции ротора относительно его оси. Несколько сложнее образуется выражение кинетической энергии массы m_2 . Ее горизонтальная координата определяется выражением

$$x_2 = -r \sin \varphi, \quad (46.4)$$

а вертикальная координата равна

$$y_2 = y + h + r \cos \varphi \quad (46.5)$$

(см. рис. 46.3). Дифференцируя выражения (46.4) и (46.5) по времени, находим проекции скорости массы m_2 :

$$\dot{x}_2 = -r\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (46.6)$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y} - r\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (46.7)$$

а кинетическую энергию массы m_2 :

$$T_1 = \frac{m_2}{2} [(\dot{y} - r\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (-r\dot{\varphi} \cos \varphi)^2]. \quad (46.8)$$

Наконец, кинетическая энергия массы m_1 запишется в виде

$$T_3 = \frac{m_1 \dot{y}^2}{2}. \quad (46.9)$$

Складывая выражения (46.8), (46.5) и (46.9), получим кинетическую энергию системы, зависящую через обобщенные координаты и скорости:

$$T = \frac{(m_1 + m_2)r^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{(m_1 + m_2)\dot{y}^2}{2} - m_2 r \dot{\varphi} \dot{y} \sin \varphi. \quad (46.10)$$

Если ввести сокращенные обозначения

$$I = I_1 + m_1 r^2, \quad m = m_1 + m_2 \quad (46.11)$$

то кинетическая энергия запишется в виде

$$T = \frac{I \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m \dot{y}^2}{2} - m_2 r \dot{\varphi} \dot{y} \sin \varphi. \quad (46.12)$$

Теперь образуем левые части уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = m \ddot{y} - m_2 r (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi), \quad (46.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = I \ddot{\varphi} - m_2 r \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Правая часть уравнений Лагранжа является обобщенные силы. Для координаты y обобщенной силой является сила упругости пружины

$$Q_y = -cy,$$

где c — коэффициент жесткости пружины. Для координаты φ обобщенной силой является сумма вращающего момента (46.2) и момента сил трения, который мы примем пропорциональным угловой скорости $\dot{\varphi}$:

$$Q_\varphi = M_1 - a\dot{\varphi} - b\dot{\varphi}, \quad (46.14)$$

где A — коэффициент сопротивления.

Таким образом, уравнения Лагранжа имеют вид

$$m\ddot{y} - m_1 r (\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = -cy, \quad (46.15)$$

$$J\ddot{\varphi} - m_1 r^2 \dot{\varphi} \sin \varphi = M_1 - (a + b)\dot{\varphi}. \quad (46.16)$$

Важно заметить, что в эти уравнения трения не входит в явном виде; ими описывается движение вращающейся системы.

Конечно, записанная система уравнений не удовлетворяется решением

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \varphi = \omega t, \quad (46.17)$$

описывающим процесс равномерного вращения ротора. Действительно, в этом случае уравнение (46.15) приобретает бы форму

$$m\ddot{y} + cy = m_1 r \omega^2 \cos \omega t \quad (46.18)$$

и имеет решение вида

$$y = A \cos \omega t. \quad (46.19)$$

Но тогда, подставив последние выражения в уравнение (46.16), мы получим бы в левой части переменную величину $m_1 r^2 \omega^2 \cos \omega t \sin \omega t$, в то время как правая часть постоянна. Отсюда следует, что угловая скорость вращения ротора не может оставаться постоянной; в этом состоит одна из важных особенностей рассматриваемой задачи.

Однако можно указать такой предельный вид характеристики двигателя, когда решение (46.17) окажется правильным; он изображен на рис. 46.4. Как и на рис. 46.2, эта характеристика может переключаться влево или вправо в зависимости от рабочего напряжения. В этом случае вращающий момент есть неопределенная величина

и в н.д., т. е. левая часть уравнения (46.16) может быть любой величиной, и решение (46.17) уже не противоречит системе уравнений (46.15), (46.16).

Чем мощнее двигатель, тем круче проходит его характеристика, поэтому можно сказать, что характеристика, изображенная на рис. 46.4, относится к двигателю бесконечно большой мощности. Следовательно, решение (46.17) приблизительно соответствует двигателям весьма большой мощности. Для двигателей ограниченной мощности решением (46.17) пользоваться нельзя.

К сожалению, точное решение системы уравнений (46.15), (46.16) в замкнутом виде невозможно. Поэтому мы поставим более скромную, но зато достижимую цель — построить явное приближение, способное отразить главные особенности движения рассматриваемой системы.

Общая схема дальнейшего выклада состоит в следующем. С помощью уравнения (46.15) выразим y через переменную φ ; если упрощения здесь придется пойти на некоторые неточности. Затем мы подставим найденное выражение y в уравнение (46.16) и займемся анализом возможных решений для функции $\varphi(t)$; при этом и обнаружится эффект Зоммерфельда.

Прежде всего уравнение (46.15) запишем в виде

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{m_1 r}{m} (\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi), \quad (46.20)$$

Здесь правую часть можно представить в следующей компактной форме:

$$\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi = -\frac{d^2}{dt^2} (\cos \varphi), \quad (46.21)$$

после чего уравнение (46.20) принимает вид

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{m_1 r}{m} \frac{d^2}{dt^2} (\cos \varphi) \quad (46.22)$$

($\omega_0^2 = c/m$). Решение этого уравнения будем размысливать в виде

$$y = \frac{d^2}{2\omega_0^2} (A \cos \varphi), \quad (46.23)$$



Рис. 46.4. Характеристика двигателя с бесконечной мощностью

где, в отличие от (46.19), $A = A(t)$ — функция времени, а функция φ не совпадает с производной ωt . При этом будем считать, что $A(t)$ медленно изменяется во времени, т. е. приращение ΔA за один цикл колебаний мало по сравнению с величиной A :

$$\Delta A = \dot{A}T + \frac{1}{2} \ddot{A}T^2 + \dots \ll A.$$

Отсюда следует

$$\dot{A} \ll \omega A, \quad \ddot{A} \ll \omega^2 A, \quad \dots \quad (46.24)$$

Примем также, что производная $\dot{\varphi}$ близка к значению ω и также медленно изменяется во времени; следовательно, приращение $\Delta \dot{\varphi}$ за один цикл мало по сравнению с величиной ω :

$$\Delta \dot{\varphi} = \ddot{\varphi}T + \frac{1}{2} \dddot{\varphi}T^2 + \dots \ll \omega.$$

Т. е.

$$\ddot{\varphi} \ll \omega^2, \quad \dddot{\varphi} \ll \omega^3. \quad (46.25)$$

Таким образом, мы будем считать, величины A и $\dot{\varphi}$ малыми первого порядка, величины \dot{A} , $\ddot{\varphi}$, $\dot{A}\dot{\varphi}$ — малыми второго порядка и т. д. Поэтому, образуя вторую для дальнейшего вторую производную

$$\ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2} (A \cos \varphi)$$

и четыре раза дифференцируя произведение $A \cos \varphi$, мы будем систематически опускать все члены, начиная с порядка малости выше первого. Поступая таким образом, мы приходим к следующему приближенному выражению:

$$\ddot{y} = A\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + (6A\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 4\dot{A}\dot{\varphi}^2) \sin \varphi. \quad (46.26)$$

Для того чтобы выразить входящие сюда величины A и \dot{A} через φ , подставим (46.23) в уравнение (46.22). При этом получатся соотношения

$$\left(\ddot{A} - A\dot{\varphi}^2 + A\omega_0^2 + \frac{2\dot{A}\dot{\varphi}}{A} \right) \cos \varphi - (2A\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + A\dot{\varphi}^2) \sin \varphi = 0. \quad (46.27)$$

Для точностного выполнения равенства (46.27) достаточно, чтобы оба выражения в скобках порознь равнялись нулю:

$$A - A\dot{\varphi}^2 + A\omega_0^2 + \frac{2\dot{A}\dot{\varphi}}{A} = 0, \quad (46.28)$$

$$2A\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + A\dot{\varphi}^2 = 0. \quad (46.29)$$

Опуская слагаемое \dot{A} в выражении (46.28), найдем приближенное выражение

$$A = \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (46.30)$$

С учетом этого из соотношения (46.29) получим

$$\dot{A} = -\frac{2\omega\dot{\varphi}}{2\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}. \quad (46.31)$$

Подставив (46.30) и (46.31) в (46.26), приходим к выражению

$$\ddot{y} = \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} (\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + 4\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \sin \varphi). \quad (46.32)$$

Если это выражение подставить в уравнение (46.16), то оно будет содержать только одну переменную φ ; в частности, второе слагаемое левой части уравнения (46.16) определится в виде

$$-\omega_1 r \dot{\varphi} \sin \varphi = -\frac{\omega_1^2 r^2}{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)} (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + 4\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \sin^2 \varphi). \quad (46.33)$$

Следующая операция, которую мы произведем над полученным выражением, также носит приближенный характер и связана с тем, что переменные, стоящие в скобках, имеют различные темпы изменения. Согласно сказанному выше величины $\dot{\varphi}^2$ и $\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$ — медленно меняющиеся функции, т. е. их приращения за один период малы, тогда как тригонометрические функции $\sin \varphi \cos \varphi$ и $\sin^2 \varphi$ успевают за один период выложить полный цикл изменения. Поскольку нас интересует общий характер процесса, т. е. его протекание в течение весьма большого числа периодов, мы можем игнорировать подробности, относящиеся к движению в пределах одного цикла.

Математически эта мысль осуществляется заменой быстро меняющихся переменных $\sin \varphi \cos \varphi$ и $\sin^2 \varphi$ их средними значениями за период 2π :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}. \quad (46.34)$$

Поэтому вместо (46.33) можно принять

$$-\omega_1 r \dot{\varphi} \sin \varphi \approx \frac{2\omega_1^2 r^2}{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)} \dot{\varphi}^2 \varphi \approx \frac{2\omega_1^2 r^2 \omega_0^2}{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)} \ddot{\varphi}. \quad (46.35)$$

Здесь в заключительной выкладке принято $\dot{\varphi} = \omega$.

Теперь уравнение (46.16) приобретает вид линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\left[I + \frac{2m\beta^2 \omega^2}{\pi(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \ddot{\varphi} + (\alpha + k) \dot{\varphi} = M_0. \quad (46.36)$$

Общее решение этого уравнения состоит из частного решения

$$\varphi = \frac{M_0}{\alpha + k} t, \quad (46.37)$$

описывающего равномерное вращение ротора двигателя, и решения однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{\varphi} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (46.38)$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda \left\{ \left[I + \frac{2m\beta^2 \omega^2}{\pi(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \lambda + (\alpha + k) \right\} = 0. \quad (46.39)$$

Один из корней равен нулю, с этим корнем не связаны какие-либо существенные эффекты. Возможная неустойчивость определяется анализом суммы, стоящей в квадратных скобках выражения (46.39). Если эта сумма положительна, то второй корень оказывается отрицательным, в соответствующее движение — затухающее колебание. Однако при отрицательной сумме

$$I + \frac{2m\beta^2 \omega^2}{\pi(\omega_0^2 - \omega^2)} < 0 \quad (46.40)$$

появляется положительный корень, которому соответствует монотонный уход системы от стационарного режима. Таким образом, если ω удовлетворяет неравенству

$$\omega_0 < \omega < \sqrt{\frac{\alpha k}{1 - \frac{2m\beta^2}{I\pi}}} \quad (46.41)$$

то движение неустойчиво.

На рис. 46.5 изображена резонансная кривая для рассмотренной системы, построенная по уравнению (46.30). Часть правой ветви, отмеченной крестиками, соответствует неустойчивым режимам.

Любопытно, что расположение области неустойчивости не зависит от параметров двигателя α , k и M_0 . Однако само

значение неустойчивого корня, очевидно, зависит от значения параметров двигателя α и k ; соответственно она зависит на темп аperiodического ухода системы от стационарного режима.

Эти заключения, в основном, остаются справедливыми и в том случае, если имеется взаимное соприкосновение движущей массы m_2 ; однако такое соприкосновение несколько изменяет границы области неустойчивости.

Известное решение было дано Н. Рокром в книге «Dynamique générale des véhicules» (1-е изд., 1943; 2-е изд., 1949; 3-е изд., 1961). Во всех изданиях этой книги повторяется одна и та же ошибка в правой части уравнения (46.31) — вместо знака минус, находящегося перед второй член в числителе скобки уравнения (46.30) получается с противоположным знаком, а в результате область неустойчивости была обнаружена на $\lambda = \alpha + k$ вместо рассмотренной ветви, что не согласуется с вытекающей из вышесказанного Заключением (см. это статья в ВД), 1962, № 18).

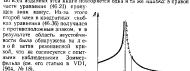


Рис. 46.5. Резонансная кривая

Н. Н. Волковом в работе «Самовозбуждение и автоколебания в нелинейных системах» (Изв. АН СССР, 1953, т. XVII) обнаружил неустойчивые режимы на правой ветви рассмотренной ветви. См. также статью Н. Н. Волкова и Г. Ю. Давыдовича «Динамика регулятора Буассо — Селдо» (Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 10). В дальнейшем исследователи В. О. Козловский и другие авторы рассмотренного действия двигателя с ограниченной мощностью на нелинейные и параметрические участки системы (см. книгу В. О. Козловского «Область устойчивости системы с ограниченным возбуждением» (М.: Наука, 1964).

Впервые для анализа одной ветви корня, скользя в область неустойчивого параметра (46.41); во-2-ю очередь — верхней ветви (перейти ветви кривой на рис. 46.5) мы обратимся к работам авторов книги В. Л. и С. В. Никольского).

§ 47. Различные автоколебания при нулевом трении

Во многих случаях установившиеся автоколебания практически можно считать гармоническими, и ряд численных методов основан на этом свойстве искомого колебательного процесса. Наряду с этим встречаются нелинейные автоколебательные системы, периодическое движение которых резко отличается от гармонического — такие автоколебания называются *резонансными*. К этой ка-

теории относительности, в частности, функциональные автоколебания, когда этапы данной чередуются с этапами покоя; в подобных случаях необходимо постоянное рассмотрение процесса с учетом соответствующих условий «выпадения» смежных этапов.

Примером такой системы может служить груз, скользящий вдоль прямой по горизонтальной горизонтальной плоскости под действием горизонтальной толкающей силы P , которая передается грузу через буфер — упругую пружину с горизонтальной осью. (Система настолько проста, что здесь можно обойтись без поясняющего рисунка.) Предполагается, что конец пружины, к которому приложена толкающая сила (ведущий конец), движется с постоянной заданной скоростью v_0 . Силу трения между грузом и плоскостью будем описывать законом Кулона, учитывая различие между предельной силой трения покоя R_1 и силой трения скольжения R_2 .

Следует, что такая система может находиться в неустойчивом режиме, когда груз движется равномерно со скоростью v_0 , а сила трения составляет R_2 ; при этом сила P также равна R_2 .

Но если скорость v_0 мала, то небольшое случайное приращение может оказаться достаточным для остановки груза. Если это происходит, то, как мы увидим, начнется автоколебательный процесс при изменении по времени силы P .

Предположим, что груз остановился; так как при этом предельная сила трения возрастает до значения R_1 , то потребуются некоторое время, чтобы сила сцепки пружины P достигла этого же значения, необходимого для срыва груза с места. Пока происходит этот этап срыва груза и обуславливает, что происходит сразу же после срыва. Сила трения мгновенно уменьшается до значения R_2 ; так как сила сцепки пружины мгновенно измениться не может, то в первый момент выходящего движения она будет по-прежнему равна R_1 . Этот момент срыва груза приравняем за начало отсчета времени ($t=0$); при этом равны нулю как начальное смещение x , так и начальная скорость \dot{x} , т. е.

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (47.1)$$

Второе условие вытекает из того, что мгновенный скачок скорости груза немаловажен (такому скачку соответствовало бы бесконечно большое ускорение, а следовательно,

и бесконечно большая сила). Здесь из груза в первый момент движения действует конечная сила $R_1 - R_2^*$.

Так как в последующем движение скорость груза \dot{x} отличается от скорости v_0 , то длина пружины будет меняться. К моменту времени t дополнительное удлинение пружины составит $x - v_0 t$; сила упругости пружины уменьшится на величину $c(x - v_0 t)$ и будет равна

$$P(t) = R_1 - c(x - v_0 t) \quad (47.2)$$

(c — жесткость пружины). Поэтому дифференциальное уравнение движения груза имеет вид

$$R_1 - c(x - v_0 t) - R_2 = m\ddot{x},$$

где m — масса груза, или

$$\ddot{x} + p^2 x = p^2 v_0 t + (R_1 - R_2)/m, \quad (47.3)$$

где

$$p^2 = c/m. \quad (47.4)$$

Решение этого уравнения, отвечающее начальным условиям (47.1), имеет вид

$$x = v_0 t - \frac{v_0}{p} \sin pt + \frac{R_1 - R_2}{c} (1 - \cos pt). \quad (47.5)$$

Первое слагаемое правой части выражает равномерное движение со скоростью ведущего конца пружины, а остальные слагаемые — колебательные колебания груза. Скорость груза меняется по закону

$$\dot{x} = v_0 - v_0 \cos pt + \frac{p(R_1 - R_2)}{c} \sin pt. \quad (47.6)$$

Следующая остановка груза произойдет в мгновение, когда \dot{x} вновь обратится в нуль. Условие остановки $\dot{x} = 0$ приводит, согласно выражению (47.6), к трансцендентному уравнению

$$v_0 - v_0 \cos pt_1 + \frac{p(R_1 - R_2)}{c} \sin pt_1 = 0, \quad (47.7)$$

в котором через t_1 обозначено время от срыва до новой остановки.

* Ускорение мгновенно увеличивается от нуля до значения $(R_1 - R_2)/m$; такой разрыв ускорения в механике всегда вызывает явную ударную (в отличие от мгновенного удара — при разрыве скорости) или толчковую.

Введем безразмерный параметр

$$\alpha = \frac{\rho(R_1 - R_2)}{c_0} = \frac{2}{\rho c_0} \Delta f, \quad (47.8)$$

где Δf — разность коэффициентов трения поков в движении. Тогда условие останова (47.7) примет вид

$$\alpha \sin \rho t_1 = \cos \rho t_1 - 1, \quad (47.9)$$

откуда

$$\sin \rho t_1 = -\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}, \quad \cos \rho t_1 = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}. \quad (47.10)$$

Найдя отсюда значение t_1 , можно по формуле (47.5) определить абсциссу x_1 в момент останова, т. е. путь, пройденный грузом за время t_1 :

$$x_1 = v_0 t_1 + \frac{2\alpha v_0}{\rho}. \quad (47.11)$$

С учетом полученных выражений выйдем по формуле (47.2) силу сжатия пружины в момент останова:

$$P(t_1) = 2R_1 - R_2. \quad (47.12)$$

Так как $R_1 < R_2$, то $P(t_1) < R_1$; следовательно, после останова груз некоторое время останется на месте, пока сила упругости пружины P вновь не достигнет значения предельной силы трения поков R_1 .

За время, в течение которого груз постоит, сила сжатия пружины возрастет до величины

$$\Delta P = R_1 - P(t_1) = 2(R_1 - R_2), \quad (47.13)$$

и соответствующий укорочение пружины составит

$$\Delta l = \frac{\Delta P}{c} = \frac{2(R_1 - R_2)}{c}. \quad (47.14)$$

Этой же величине равен путь, который пройдет пущенный конец пружины за время, пока груз стоит на месте. Следовательно, длительность состояния покоя груза равна

$$t_2 = \frac{\Delta l}{v_0} = \frac{2c(R_1 - R_2)}{c_0 v_0} = \frac{2\alpha}{\rho}. \quad (47.15)$$

Конечно, тот же результат можно было найти из условия

$$v_0(t_1 + t_2) = x_1, \quad (47.16)$$

выражающего равенство перемещений концов пружины за период.

Таким образом, период автоколебаний груза определяется формулой

$$T = t_1 + t_2, \quad (47.17)$$

для пользования которой нужно сначала найти t_1 с помощью (47.10), а затем t_2 по формуле (47.15). В момент $t = T$ происходит следующий срыв груза и начинается новый цикл автоколебаний.

Чем меньше скорость ведущего конца пружины, тем более резко выражен процесс автоколебаний. Действительно, при малых значениях v_0 безразмерный параметр α становится весьма большим; из выражений (47.10) в этом случае приближенно можно получить

$$t_1 \approx \pi/\rho, \quad (47.18)$$

и при учете найденного выше выражения (47.15) период автоколебаний приближенно равен

$$T \approx (\pi + 2\alpha)/\rho. \quad (47.19)$$

Значение второго слагаемого увеличивается с уменьшением скорости v_0 .

При увеличении скорости v_0 длительность остановок уменьшается, и движение приобретает более равномерный характер.

Рассмотрим здесь задачу остановки в конце В. Г. Пахомов «Основа предельной теории упругих колебаний» (М.: Наука, 1957). Миссис Соловьева рассмотрела задачу трения в этой задаче в работе М. Е. Соловьева «Расчет нелинейной модели автоколебаний системы бистабильная и неустойчивая», 1951, № 11—12. См. также работы Энгл П. Е., Майланд Н. Е. «Parasitically excited flow on stick-slip sliding», Engng., 1955, № 307; Hilsner P. W., Wanka A. «Zur Vermeidung des Stick-Slip Vorganges», Maschinenbautechnik, 1955, № 4, № 1; Д. Р. Керман «Резонансные автоколебания тела при движении его по наклонной плоскости с помощью катящего троса», Ленинградского института водного транспорта, вып. 83, 1955; Керман Д. Р. «Torsional instability from frictional oscillations», J. Franklin Inst., 1963, ч. 271, № 4.

§ 19. Продольный шаг стержня, возбуждающего тепловую колебательную систему	147
§ 20. Период устойчивости при получении маховика	152

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

Введение	159
Глава VI. Некоторые задачи о колебаниях линейных систем	161
§ 21. Система с двумя массами и стержневой пружиной	161
§ 22. Свободные колебания маятника в поле центробежных сил	167
§ 23. Равновесные системы	171
§ 24. Записки о формулах Раунга и Грэнвилла	179
§ 25. Случай Лагранжа	189
§ 26. Продольные системы	198
§ 27. Методом малых колебаний системы	207
§ 28. Четыре способа решения задачи о движении гидравлического цилиндрического поршня	219
§ 29. Об обратной форме дифференциальных уравнений колебаний	230
§ 30. Автономные	236
§ 31. Дестабилизирующее действие сил высшего порядка	241
§ 32. Линеарные случаи разрывных колебаний с сухим трением	247
§ 33. Демпфирование колебаний трубопровода на разрывных силах	254
§ 34. Параметрические возбуждения колебаний	259
Глава VII. Двухмассовые системы с жесткой пружиной	277
§ 35. Критическая затухающая система	277
§ 36. Случай Брусселя	282
§ 37. Бегущие волны	285
§ 38. Действие разнородных распределенной массы на систему	291
Глава VIII. Аэродинамические колебания	295
§ 39. Физический анализ теории аэроупругости	295
§ 40. «Классический» флаттер	299
§ 41. Пилотажный флаттер	304
§ 42. Теория «кларн»-органной флаттер	311
Глава IX. Некоторые задачи о колебаниях нелинейных систем	317
§ 43. Малые нелинейные колебания	318
§ 44. Вынужденные колебания маятника	323
§ 45. Линеарные регуляторы Тунга — Сарда	328
§ 46. Эффект Копперфелда	333
§ 47. Различные автоколебания при сухом трении	341
Вспомогательный указатель	348
Предметный указатель	349